

第十章多元函数积分学专题复习 (学生版)

MatNoble

2026 年 6 月 5 日

目录

复习导引	2
1 考点一:二重积分的概念与性质	3
知识点汇总	3
经典例题讲解	4
例题变式	5
2 考点二:二重积分的计算	6
知识点汇总	6
经典例题讲解	6
例题变式	8
3 考点三:三重积分的计算	10
知识点汇总	10
经典例题讲解	11
例题变式	12
4 考点四:重积分的应用	13
知识点汇总	13
经典例题讲解	13
例题变式	14

复习导引

本讲义围绕第十章多元函数积分学的四类期末高频考点展开：

1. 二重积分的概念与性质；
2. 二重积分的计算；
3. 三重积分的计算；
4. 重积分的应用。

1 考点一:二重积分的概念与性质

知识点汇总

1. 几何意义:若 $f(x, y) \geq 0$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

表示以 D 为底、曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体体积。特别地,

$$\iint_D 1 d\sigma = S_D$$

表示区域 D 的面积。

2. 线性性质:

$$\iint_D [af(x, y) + bg(x, y)] d\sigma = a \iint_D f(x, y) d\sigma + b \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

3. 区域可加性:若 $D = D_1 \cup D_2$, 且 D_1, D_2 无公共内点, 则

$$\iint_D f d\sigma = \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma.$$

4. 比较性质:若在 D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f d\sigma \leq \iint_D g d\sigma.$$

判断大小题常先比较被积函数, 再积分。

5. 奇偶对称性:

区域对称	被积函数奇性	积分
D 关于 y 轴对称	$f(-x, y) = -f(x, y)$	0
D 关于 x 轴对称	$f(x, -y) = -f(x, y)$	0

若区域关于原点或直线 $y = x$ 对称, 还可结合变量替换或轮换对称性化简。

6. 常用均值思想:若 f 在闭区域 D 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)S_D.$$

经典例题讲解

1. 根据二重积分的性质,

$$\iint_D (x+y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}, \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

2. 设

$$I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, \quad I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma,$$
$$I_3 = \iint_D \cos((x^2 + y^2)^2) d\sigma, \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

则三者大小关系为()。

- (A) $I_3 > I_2 > I_1$ (B) $I_1 > I_2 > I_3$ (C) $I_2 > I_1 > I_3$ (D) $I_3 > I_1 > I_2$

3. 计算

$$\iint_D [\sin(xy^2) + \sin(x^2y) + 2] d\sigma, \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

例题变式

1. 设 D 为圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 求

$$\iint_D (x^3 + y^3 + 1) d\sigma.$$

2. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 比较

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma \quad \text{与} \quad \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} d\sigma$$

的大小。

2 考点二:二重积分的计算

知识点汇总

1. 直角坐标下的二重积分:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

若区域更适合用 y 作外层变量,也可写成

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

2. **交换积分顺序:**先根据积分限画出或还原区域 D ,再重新选择外层变量。若水平或竖直穿线时边界发生变化,需要分段。

3. 极坐标变换:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

圆、扇形、圆环、含 $x^2 + y^2$ 的被积函数通常优先考虑极坐标。课堂做题三步:先定 θ ,再定 r ,最后把被积函数和面积元一起替换,特别不要漏掉雅可比因子 r 。

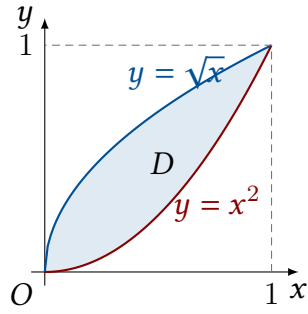
4. 常见区域极坐标形式:

区域	极坐标
$x^2 + y^2 \leq a^2$	$0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
$x^2 + y^2 \leq 2ax$	$0 \leq r \leq 2a \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$x^2 + y^2 \leq 2ay$	$0 \leq r \leq 2a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$

经典例题讲解

1. 改变积分次序:

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$



图示:换序区域 $D = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ 。

2. 将

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y dy$$

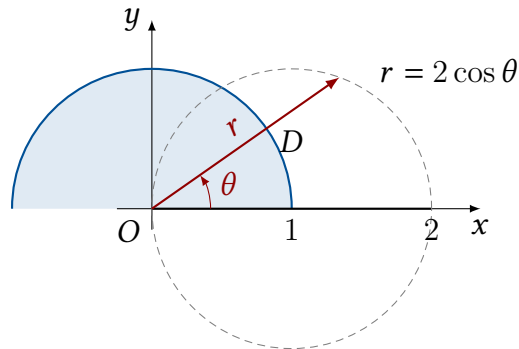
化为极坐标下的二次积分为()。

(A) $\int_0^\pi d\theta \int_0^1 r \sin \theta dr$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta dr$

(C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} r \sin \theta dr$



图示: $(x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$, 极坐标为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ 。

3. 计算

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

4. 计算

$$\iint_D xy d\sigma,$$

其中 D 由曲线 $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ 围成。

例题变式

1. 交换积分次序:

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

2. 计算

$$\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

3 考点三:三重积分的计算

知识点汇总

1. **直角坐标:**若区域边界容易写成上下曲面或前后左右边界,可直接写成三次积分。

2. **柱面坐标:**

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad dV = r \, dz \, dr \, d\theta.$$

适合投影域为圆或圆环、被积函数含 $x^2 + y^2$ 、区域绕 z 轴旋转的题。课堂常按

$$\theta \rightarrow r \rightarrow z$$

的顺序定限:方位角、投影半径、上下曲面。

3. **球面坐标:**

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi,$$

$$dV = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

适合球体、半球、圆锥与球面围成的区域,以及含 $x^2 + y^2 + z^2$ 的题。课堂常按

$$\theta \rightarrow \varphi \rightarrow \rho$$

的顺序定限:投影扇形、极角、径向距离。

4. **常见范围:**

区域	范围
$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$	$0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
$x^2 + y^2 \leq a^2, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$	$0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z_1 \leq z \leq z_2$

5. **对称性:**若空间区域关于某坐标平面对称,且被积函数关于对应变量为奇函数,则三重积分为0。

经典例题讲解

1. 设 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 则在球面坐标系下

$$\iiint_{\Omega} dV = (\quad).$$

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho$

(B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \theta d\rho$

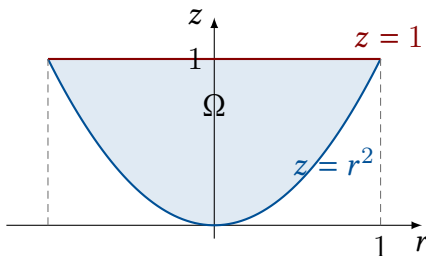
(C) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho$

2. 计算

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz,$$

其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = z$ 及平面 $z = 1$ 所围成的闭区域。



图示: 绕 z 轴旋转区域的剖面, 柱面坐标定限为 $0 \leq r \leq 1, r^2 \leq z \leq 1$ 。

例题变式

1. 计算

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV,$$

其中 Ω 由 $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 3$ 给出。

2. 计算

$$\iiint_{\Omega} z dV, \quad \Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}.$$

4 考点四:重积分的应用

知识点汇总

1. 平面区域面积:

$$S_D = \iint_D 1 \, d\sigma.$$

2. 空间立体体积:

$$V = \iint_D [z_{\text{上}}(x, y) - z_{\text{下}}(x, y)] \, d\sigma.$$

也可写成

$$V = \iiint_{\Omega} 1 \, dV.$$

3. 质量:若平面薄片密度为 $\rho(x, y)$, 则

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, d\sigma.$$

若空间物体密度为 $\rho(x, y, z)$, 则

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dV.$$

4. 形心坐标:平面薄片密度为常数时,

$$\bar{x} = \frac{1}{S_D} \iint_D x \, d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{S_D} \iint_D y \, d\sigma.$$

经典例题讲解

1. 求由平面

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

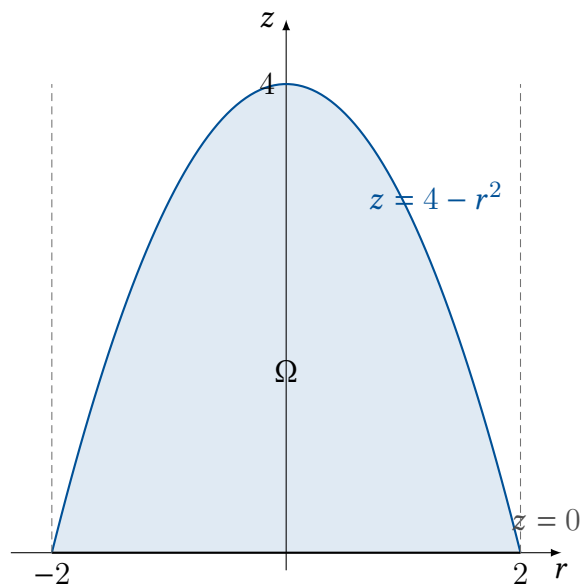
围成的立体体积。

例题变式

1. 求由曲面

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

与平面 $z = 0$ 围成的立体体积。



图示： $z = 4 - x^2 - y^2$ 与 $z = 0$ 围成立体的径向剖面，投影为 $0 \leq r \leq 2$ 。

2. 求由 $z = x^2 + y^2$ 、 $z = 4$ 围成的立体体积。