第十二章无穷级数专题复习 (学生版)

MatNoble

2026 年 6 月 2 日

目录

复习导引

本讲义围绕期末复习中第十二章的四类高频考点展开:

1. 常数项级数的概念与性质;
2. 常数项级数的敛散性;
3. 幂级数;
4. 函数的幂级数展开。

1 考点一:常数项级数的概念与性质

知识点汇总

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

   注意:$\lim u_n = 0$ 只是必要条件, 不是充分条件。

2. 线性性质:若 $\sum u_n, \sum v_n$ 都收敛, 则

$$\sum k u_n, \qquad \sum (u_n - v_n)$$

   都收敛, 其中 k 为常数。

3. 改变级数的有限项不影响级数的敛散性, 但会改变级数的和。

4. 若 $\sum u_n$ 收敛, 则其余项

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$$

   满足 $r_N \to 0$;部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ 有极限时, 级数收敛且和为 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$。

5. 裂项相消法:若

$$u_n = A_n - A_{n+1},$$

   则

$$S_N = A_1 - A_{N+1},$$

   再令 $N \to \infty$ 求和。

经典例题讲解

1. 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 10)$$

收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. 设级数 $\sum u_n$ 收敛, $\sum v_n$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n \underline{\qquad\qquad}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) \underline{\qquad\qquad}.$$

3. 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

的和。

例题变式

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(2u_n + 3)$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = \underline{\qquad\qquad}$。

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 的和。

2 考点二:常数项级数的敛散性

知识点汇总

1. p 级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1,\\ \text{发散}, & p\le 1.\end{cases}$$

2. 等价比较:若 $u_n\sim v_n$, 且 $u_n,v_n\ge 0$, 则 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛散。

3. 比较判别法:对正项级数, 若 $0\le u_n\le v_n$, 且 $\sum v_n$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 收敛;若 $u_n\ge v_n\ge 0$, 且 $\sum v_n$ 发散, 则 $\sum u_n$ 发散。

4. 极限比较判别法:若 $u_n,v_n>0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c,$$

当 $0<c<+\infty$ 时, $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛散。

5. 比值判别法:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

若 $\rho<1$, 绝对收敛;若 $\rho>1$, 发散;若 $\rho=1$, 此法失效。

6. 根值判别法:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}.$$

若 $\rho<1$, 绝对收敛;若 $\rho>1$, 发散;若 $\rho=1$, 此法失效。

7. 交错级数判别法:若 $a_n\ge 0$, a_n 单调递减且 $a_n\to 0$, 则 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛。

8. 绝对收敛与条件收敛:若 $\sum|u_n|$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 绝对收敛;若 $\sum u_n$ 收敛但 $\sum|u_n|$ 发散, 则条件收敛。

9. 常见策略:含阶乘或指数幂优先考虑比值法;含 n 次幂整体时优先考虑根值法;含 $\sin, \ln, 1-\cos$ 的小量时优先考虑等价无穷小。

10. 常用等价无穷小:

$$\ln(1+x) \sim x, \qquad \sin x \sim x, \qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0).$$

经典例题讲解

1. 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2p}}$$

条件收敛, 则 p 应满足 ____________。

2. 下列级数收敛的是( )。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^2}$ D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2}$

3. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

例题变式

1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 的敛散性。

2. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ 的敛散性。

3 考点三:幂级数

知识点汇总

1. 幂级数形式:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

2. 收敛半径 R:
$$\begin{cases} |x-x_0| < R, & \text{绝对收敛,} \\ |x-x_0| > R, & \text{发散,} \\ |x-x_0| = R, & \text{端点单独检验.} \end{cases}$$

3. Abel 定理常用结论:若 $\sum a_n x^n$ 在 $x = x_1$ 处收敛,则当 $|x| < |x_1|$ 时绝对收敛。

4. 收敛半径常用求法:
$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{或} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$
当相应极限存在时使用;求出 R 后,端点必须代回原级数单独判断。

5. 幂级数在收敛区间内部可逐项求导、逐项积分,收敛半径不变;端点收敛性需重新判断。

6. 求和函数常从
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$
出发,逐项求导或逐项积分。

经典例题讲解

1. 设幂级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$
在 $x = 2$ 处收敛,则该级数在 $x = -1$ 处必定(　　　)。

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 不能确定

2. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

的收敛域及和函数, 并求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

的和。

例题变式

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数。

2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和。

3. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

的和函数, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$。

4 考点四:函数的幂级数展开

知识点汇总

1. 基本展开式:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1.$$

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad -1<x\le 1.$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad |x|<1.$$

2. Taylor 展开的一般形式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

   当 $x_0=0$ 时称为 Maclaurin 展开。

3. 由已知展开式推出新展开式时, 可使用代换、四则运算、逐项求导和逐项积分; 收敛范围通常由各展开式的收敛范围取交集, 再检查端点。

4. 展开步骤: 看清展开中心; 若中心为 x_0, 先令 $t=x-x_0$; 有理函数优先部分分式; 凑成 $\dfrac{1}{1-\square}$; 收敛范围取交集。

经典例题讲解

1. 将函数

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$$

   展开成 $x-1$ 的幂级数。

例题变式

1. 将 $\dfrac{1}{x+2}$ 展成 x 的幂级数。

2. 将 $\dfrac{1}{x+2}$ 展成 $x-1$ 的幂级数。

3. 将函数

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

展成 x 的幂级数, 并写出收敛区间。