

# 第十二章无穷级数专题复习 (教师版)

MatNoble

2026 年 6 月 2 日

## 目录

<b>复习导引</b>	<b>2</b>
<b>1 考点一:常数项级数的概念与性质</b>	<b>3</b>
知识点汇总 . . . . .	3
经典例题讲解 . . . . .	3
例题变式 . . . . .	5
<b>2 考点二:常数项级数的敛散性</b>	<b>6</b>
知识点汇总 . . . . .	6
经典例题讲解 . . . . .	7
例题变式 . . . . .	8
<b>3 考点三:幂级数</b>	<b>9</b>
知识点汇总 . . . . .	9
经典例题讲解 . . . . .	9
例题变式 . . . . .	10
<b>4 考点四:函数的幂级数展开</b>	<b>12</b>
知识点汇总 . . . . .	12
经典例题讲解 . . . . .	12
例题变式 . . . . .	13

# 复习导引

本讲义围绕期末复习中第十二章的四类高频考点展开：

1. 常数项级数的概念与性质；
2. 常数项级数的敛散性；
3. 幂级数；
4. 函数的幂级数展开。

# 1 考点一:常数项级数的概念与性质

## 知识点汇总

1. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的必要条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

注意:  $\lim u_n = 0$  只是必要条件, 不是充分条件。

2. 线性性质: 若  $\sum u_n, \sum v_n$  都收敛, 则

$$\sum k u_n, \quad \sum (u_n - v_n)$$

都收敛, 其中  $k$  为常数。

3. 改变级数的有限项不影响级数的敛散性, 但会改变级数的和。

4. 若  $\sum u_n$  收敛, 则其余项

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$$

满足  $r_N \rightarrow 0$ ; 部分和  $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$  有极限时, 级数收敛且和为  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ 。

5. 裂项相消法: 若

$$u_n = A_n - A_{n+1},$$

则

$$S_N = A_1 - A_{N+1},$$

再令  $N \rightarrow \infty$  求和。

## 经典例题讲解

1. 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 10)$$

收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{10}.$$

**【解】** 令  $v_n = u_n - 10$ 。因为  $\sum v_n$  收敛, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 10) = 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 10.$$

2. 设级数  $\sum u_n$  收敛,  $\sum v_n$  收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n \underline{\text{收敛}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) \underline{\text{收敛}}.$$

**【解】** 由收敛级数的线性性质, 收敛级数作常数倍仍收敛, 两个收敛级数相减仍收敛。

3. 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

的和。

**【解】** 因为

$$4n^2 - 1 = (2n - 1)(2n + 1),$$

所以

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right).$$

部分和为

$$S_N = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2N + 1} \right).$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 得

$$S = \frac{1}{2}.$$

## 例题变式

1. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} (2u_n + 3)$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \underline{-\frac{3}{2}}$ 。

**【解】** 由必要条件,  $2u_n + 3 \rightarrow 0$ , 故  $u_n \rightarrow -\frac{3}{2}$ 。

2. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  的和。

**【解】**

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故  $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ , 所以

$$S = 1.$$

## 2 考点二:常数项级数的敛散性

### 知识点汇总

1.  $p$  级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛, } p > 1, \\ \text{发散, } p \leq 1. \end{cases}$$

2. 等价比较:若  $u_n \sim v_n$ , 且  $u_n, v_n \geq 0$ , 则  $\sum u_n$  与  $\sum v_n$  同敛散。

3. 比较判别法:对正项级数, 若  $0 \leq u_n \leq v_n$ , 且  $\sum v_n$  收敛, 则  $\sum u_n$  收敛; 若  $u_n \geq v_n \geq 0$ , 且  $\sum v_n$  发散, 则  $\sum u_n$  发散。

4. 极限比较判别法:若  $u_n, v_n > 0$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = c,$$

当  $0 < c < +\infty$  时,  $\sum u_n$  与  $\sum v_n$  同敛散。

5. 比值判别法:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|.$$

若  $\rho < 1$ , 绝对收敛; 若  $\rho > 1$ , 发散; 若  $\rho = 1$ , 此法失效。

6. 根值判别法:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}.$$

若  $\rho < 1$ , 绝对收敛; 若  $\rho > 1$ , 发散; 若  $\rho = 1$ , 此法失效。

7. 交错级数判别法:若  $a_n \geq 0$ ,  $a_n$  单调递减且  $a_n \rightarrow 0$ , 则  $\sum (-1)^n a_n$  收敛。

8. 绝对收敛与条件收敛:若  $\sum |u_n|$  收敛, 则  $\sum u_n$  绝对收敛; 若  $\sum u_n$  收敛但  $\sum |u_n|$  发散, 则条件收敛。

9. 常见策略:含阶乘或指数幂优先考虑比值法; 含  $n$  次幂整体时优先考虑根值法; 含  $\sin, \ln, 1 - \cos$  的小量时优先考虑等价无穷小。

10. 常用等价无穷小:

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \rightarrow 0).$$

## 经典例题讲解

1. 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2p}}$$

条件收敛, 则  $p$  应满足  $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 。

**【解】** 交错级数收敛要求

$$\frac{1}{n^{2p}} \rightarrow 0 \iff p > 0.$$

绝对收敛要求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$$

收敛, 即  $2p > 1$ , 也就是  $p > \frac{1}{2}$ 。条件收敛要求收敛但不绝对收敛, 故

$$0 < p \leq \frac{1}{2}.$$

2. 下列级数收敛的是( D )。

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$       D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$

**【解】** A 中  $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$ , 发散。B 中  $\frac{1}{n + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$ , 发散。C 中通项  $\frac{e^n}{n^2} \neq 0$ , 发散。D 中  $\sin \frac{\pi}{n^2} \sim \frac{\pi}{n^2}$ , 与收敛的  $p$  级数同敛散, 故收敛。

3. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

**【解】** (1) 因为  $1 - \cos \frac{a}{n} \sim \frac{a^2}{2n^2}$ , 所以绝对收敛。

(2) 因为  $\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$ , 所以发散。

(3) 因为  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ , 所以发散。

(4) 设  $u_n = \frac{n^n}{n!}$ , 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1,$$

由比值判别法, 级数发散。

## 例题变式

1. 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n\sqrt{n}}$  的敛散性。

**【解】**

$$\arctan \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}},$$

因为  $3/2 > 1$ , 故级数收敛。

2. 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$  的敛散性。

**【解】** 用根值判别法:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n+1}{3n-1} \rightarrow \frac{2}{3} < 1,$$

故级数收敛。

### 3 考点三:幂级数

#### 知识点汇总

1. 幂级数形式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

2. 收敛半径  $R$ :

$$\begin{cases} |x - x_0| < R, & \text{绝对收敛,} \\ |x - x_0| > R, & \text{发散,} \\ |x - x_0| = R, & \text{端点单独检验.} \end{cases}$$

3. Abel 定理常用结论:若  $\sum a_n x^n$  在  $x = x_1$  处收敛,则当  $|x| < |x_1|$  时绝对收敛。

4. 收敛半径常用求法:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{或} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

当相应极限存在时使用;求出  $R$  后,端点必须代回原级数单独判断。

5. 幂级数在收敛区间内部可逐项求导、逐项积分,收敛半径不变;端点收敛性需重新判断。

6. 求和函数常从

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

出发,逐项求导或逐项积分。

#### 经典例题讲解

1. 设幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

在  $x = 2$  处收敛,则该级数在  $x = -1$  处必定( C )。

- A. 发散    B. 条件收敛    C. 绝对收敛    D. 不能确定

**【解】** 因为幂级数在  $x = 2$  处收敛, 由 Abel 定理, 在  $|x| < 2$  内绝对收敛。又  $|-1| = 1 < 2$ , 故在  $x = -1$  处绝对收敛。

2. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

的收敛域及和函数, 并求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

的和。

**【解】** 由几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

因为  $n(n+1) = n^2 + n$ , 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

收敛域为  $(-1, 1)$ , 和函数为

$$S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

令  $x = \frac{1}{2}$ , 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8.$$

## 例题变式

1. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  的和函数。

**【解】**

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

2. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的和。

**【解】** 令  $x = \frac{1}{2}$ , 由  $\sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$  得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

3. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

的和函数, 并计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 。

**【解】** 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

两边乘以  $x$  后求导, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \left( \frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

令  $x = \frac{1}{3}$ , 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3})^3} = \frac{3}{2}.$$

## 4 考点四:函数的幂级数展开

### 知识点汇总

1. 基本展开式:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1.$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

2. Taylor 展开的一般形式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

当  $x_0 = 0$  时称为 Maclaurin 展开。

3. 由已知展开式推出新展开式时,可使用代换、四则运算、逐项求导和逐项积分;收敛范围通常由各展开式的收敛范围取交集,再检查端点。

4. 展开步骤:看清展开中心;若中心为  $x_0$ ,先令  $t = x - x_0$ ;有理函数优先部分分式;凑成  $\frac{1}{1-\square}$ ;收敛范围取交集。

### 经典例题讲解

1. 将函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$$

展开成  $x-1$  的幂级数。

**【解】** 因式分解:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

部分分式分解:

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 3} \right).$$

令  $t = x - 1$ , 则  $x + 1 = t + 2$ ,  $x + 3 = t + 4$ 。于是

$$\frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{t}{2} \right)^n, \quad |t| < 2,$$

$$\frac{1}{x + 3} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{t}{4} \right)^n, \quad |t| < 4.$$

代回得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x - 1)^n.$$

收敛范围为

$$|x - 1| < 2.$$

## 例题变式

1. 将  $\frac{1}{x + 2}$  展成  $x$  的幂级数。

**【解】**

$$\frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{x}{2} \right)^n, \quad |x| < 2.$$

2. 将  $\frac{1}{x + 2}$  展成  $x - 1$  的幂级数。

**【解】** 令  $t = x - 1$ , 则  $x + 2 = t + 3$ 。因此

$$\frac{1}{x + 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + t/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{t}{3} \right)^n.$$

即

$$\frac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-1)^n, \quad |x-1| < 3.$$

3. 将函数

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

展成  $x$  的幂级数, 并写出收敛区间。

**【解】** 设

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

直接相乘也可以, 但更简洁的方法是令  $u = 1+x$ , 则

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{\ln u}{u}.$$

由

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

两边对参数积分, 或用 Cauchy 乘积, 可得

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n, \quad |x| < 1.$$

端点需另判:  $x = 1$  时通项为  $(-1)^{n-1} H_n$ ,  $x = -1$  时通项为  $-H_n$ , 其中

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

两端通项均不趋于 0, 故收敛区间为

$$(-1, 1).$$