厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

7-1 微分方程的基本概念

第七章 微分方程

张 振
信息科学与技术学院

- **导数**：描述变量之间的**瞬时变化率**。
  - 几何上表示曲线在该点的切线斜率；物理上可表示速度、密度等。
  - 记作 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$。
- **微分**：描述函数的**线性近似整体改变量**。
  - 记作 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$。

> **例 7.1.1**：已知函数 $y = \sin(2x) + x^3$，求其导数与微分。

课前复习一：导数与微分的本质（解答）

> **解：**
>
> - 导数：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos(2x) + 3x^2$
> - 微分：$\mathrm{d}y = (2\cos(2x) + 3x^2)\mathrm{d}x$

课前复习二：不定积分与常数 C

- **积分**：求导的**逆运算**。
  - 从已知的变化率（导数规律），还原出原本的函数形态。
  - 记作 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$。
- **任意常数 C 的不可或缺性**：
  - 因为任何常数求导均为 0，即 $(F(x)+C)' = f(x)$。
  - 由此可见，仅仅通过变化率还原出的不是单一函数，而是一个平行的**函数族**。

> **例 7.1.2**：求不定积分 $\int(3x^2 - e^x)\mathrm{d}x$。

课前复习二：不定积分与常数 C（解答）

解： $\int(3x^2 - e^x)\mathrm{d}x = x^3 - e^x + C$。

(注：计算中遗漏常数 C 是常见错误，而这将在后续作为微分方程“通解”概念的核心。)

- **特解与附加条件**：为了在平行的函数族中确定唯独的那一条曲线（或唯一的真实物理运动规律），必须给定一个**初始状态或附加条件**以确定常数 C。

> **例 7.1.3**：已知直线运动质点的加速度 $a = 6t$，且初始时刻（$t = 0$）的速度 $v_0 = 5$，求速度随时间变化的函数 $v(t)$。

课前复习三：物理意义与初始条件（解答）

> **解：**
>
> 1. 根据运动学意义，加速度是速度的导数：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6t$
> 2. 两边积分求一般规律：$v(t) = \int 6t\mathrm{d}t = 3t^2 + C$
> 3. 代入初始状态定常数：$v(0) = 3(0)^2 + C = 5 \Rightarrow C = 5$
> 4. 得出具体运动规律：$v(t) = 3t^2 + 5$。

刚才复习的“求导逆运算”找函数的问题，实际上也是我们未来要研究的最基本的微分方程。

核心思维跨越：

- **已知模型（如右端仅含自变量）**：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6t$
  - 变化率是一个已知的关于时间 t 的函数。
  - 求解直接运用**普通不定积分**：$v(t)=\int 6t\mathrm{d}t$。
- **未知模型（如右端隐含未知函数自身）**：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$ （空气阻尼减速模型）
  - 变化率与**速度本身**产生循环因果关联。
  - 此时对两边同时关于 t 积分时，$\int -kv\mathrm{d}t$ 无法直接操作。

单一的积分工具失效了，这迫使我们必须针对导数关系式建立全新的理论与求解策略——**正式开启《微分方程》篇章**。

引言：从求“数值”到求“函数”

在之前的代数课程中，我们处理的多是**代数方程**：

- 未知数是一个或多个具体的**数值**。
- 例如：$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$。

但在研究自然界的变化规律（如运动、生长、衰变）时，我们往往只能找到：

- **未知函数**及其**导数**（或微分）之间的关系。
- 目标是求出这个**未知函数**本身。

> **引言**：设一曲线通过点 $(1,2)$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2x$，求该曲线方程。
>
> $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

1. 微分方程与阶数

- **定义**
  表示未知函数、未知函数的导数（或微分）与自变量之间关系的方程，称为**微分方程**。
- **一般形式**
  $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$
  其中 x 为自变量，y 为未知函数。
- **阶**
  微分方程中出现的**未知函数导数的最高阶数**，称为微分方程的**阶**。
  - 一阶：$y' = x + y$
  - 二阶：$y'' + 2y' + 5y = 0$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g$

- **n 阶线性微分方程概念**
  如果一个 n 阶微分方程关于未知函数 y 及其各阶导数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ 都是**一次（即线性）的**，则称为 n **阶线性微分方程**。

- **标准形式**

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

  其中系数 $a_i(x)$ 及自由项 $f(x)$ 均为**只与** x **有关**的已知常数或函数，且 $a_n(x) \neq 0$。

- **非线性的特征**
  如果存在 y, y' 等各项相互的乘积（如 yy'）、更高次幂（如 $(y')^2$）或作为复合函数的内层函数（如 $\sin y$），则为**非线性微分方程**。

即时练习

练习 7.1.1：指出下列微分方程的阶数，并判断其是否为线性微分方程：

1. $(y')^2 + xy = 0$
2. $y''' - 5y' = \sin x$
3. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

解析：

根据定义，微分方程的阶数取决于方程中含有的**最高阶导数**；而线性性质取决于 y 及各阶导数是否均为独立的一次项。

1. $(y')^2 + xy = 0$
   最高阶导数是 y'，但包含导数的二次幂 $(y')^2$。
   结论： 一阶非线性微分方程。

2. $y''' - 5y' = \sin x$
   最高阶导数是 y'''，且 y 的各阶导数均为一次幂且互不相乘。右侧 $\sin x$ 仅与 x 有关。
   结论： 三阶线性微分方程（非齐次）。

3. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$
   最高阶导数为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$（即 y''），但存在交叉乘积项 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。
   结论： 二阶非线性微分方程。

2. 微分方程的“解”体系

- **微分方程的解**
  代入微分方程能使方程成为恒等式的**函数**，称为该微分方程的解。
- **通解（General Solution）**
  微分方程的解中含有任意常数，且**任意常数的相互独立的个数与方程的阶数相同**，这样的解称为微分方程的**通解**。
- **特解（Particular Solution）**
  不含任意常数的解，称为**特解**。
  特解通常是通过在**通解**中代入初始条件，确定了任意常数的值后得到的。

即时练习

练习 7.1.2：验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是如下微分方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$$

证：

要求导原始方程两次并代入验证：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2C_1 \cos kt - k^2C_2 \sin kt = -k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) = -k^2x$$

将 x 与 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 的表达式代入原方程：

$$\text{左边} = -k^2x + k^2x = 0 = \text{右边}$$

由于该解含有 C_1, C_2 两个独立的任意常数，且原方程为二阶微分方程（任意常数个数等于阶数），因此该函数为方程的**通解**。

- **初始条件（Initial Condition）**
  为确定通解中的任意常数，通常需规定未知函数（及其导数）在某特定点的值。
  - 一阶方程需 1 个条件：$y|_{x=x_0}=y_0$
  - 二阶方程需 2 个条件：$y|_{x=x_0}=y_0$，$\quad y'|_{x=x_0}=y_0'$
- **初值问题**
  求微分方程满足给定初始条件的**特解**问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

- **几何意义**
  - 微分方程的解 $y=y(x)$ 在几何上表示一条**积分曲线**。
  - **通解**表示**积分曲线族**；**特解**表示曲线族中**通过特定点** (x_0,y_0) 的那一条。

习

即时练

练习 7.1.3：回到本节课开头的引例：
一曲线通过点 $(1,2)$，且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$。请建立相应的微分方程，并求满足该条件的曲线方程（特解）。

解：

1. **建立方程**：根据导数几何意义（切线斜率为导数），有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

2. **求通解**：对等式两边进行积分

$$y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C \quad (C\text{ 为任意常数})$$

3. **定特解**：根据初始条件，曲线过点 $(1, 2)$，代入 $y|_{x=1} = 2$:

$$2 = 1^2 + C \Rightarrow C = 1$$

故所求满足条件的曲线方程（即特解）为 $y = x^2 + 1$。

即时练习

练习 7.1.4：

1. 验证 $y = Ce^{-2x}$ 是方程 $y' + 2y = 0$ 的通解。
2. 求满足方程 $y' = 3$ 且过点 $(0, 1)$ 的特解。

练习解析：结合初值的计算

解析 1：

求导得 $y' = -2Ce^{-2x}$。

代入方程：$-2Ce^{-2x} + 2(Ce^{-2x}) = 0$。恒成立且含有 1 个独立常数，方程为一阶，故为通解。

解析 2：

1. 对方程 $y' = 3$ 积分求通解，得：$y = 3x + C$。
2. 将初始条件 $(0, 1)$ 代入，即当 $x = 0$ 时，$y = 1$:

$$1 = 3(0) + C \Rightarrow C = 1$$

3. 所求特解为：$y = 3x + 1$。

- **基本概念**

  如果一个一阶微分方程能写成如下形式：

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

  即等式一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$，则称此方程为**可分离变量的微分方程**。

- **求解步骤**

1. **分离变量**：通过代数变形，将方程化为 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ 的形式。
2. **两端积分**：对等式两边同时取积分：
$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$
3. **求出通解**：设 $G(y)$ 与 $F(x)$ 依次为 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数，积分后可得：
$$G(y) = F(x) + C$$
   其中 C 为任意常数。这一步通常得到的是隐式通解。

练即时

例 7.1.4：求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x-y}$ 的通解。

解：

1. **分离变量**：根据指数运算法则 $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$。
   将方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^x}{e^y}\Rightarrow e^y\mathrm{d}y=e^x\mathrm{d}x$
2. **两端积分**：

$$\int e^y\mathrm{d}y=\int e^x\mathrm{d}x$$

3. **计算出通解**：

$$e^y=e^x+C$$

（两边取自然对数可化为显式解 $y=\ln(e^x+C)$）

练即时

例 7.1.5：求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解。

解：

1. **分离变量**：
   假定 $y \neq 0$，将原方程两边同除以 y，并同乘 $\mathrm{d}x$，得到：
   $$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$
2. **两端积分**：
   $$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int 2x\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C_1$$

3. **化简通解（重点核心步骤）**：

利用指数性质改写上式：

$$|y| = e^{x^2+C_1} = e^{C_1}e^{x^2}$$

令 $C = \pm e^{C_1}$（此时 $C \neq 0$ 取非零常数），则脱去绝对值有：

$$y = Ce^{x^2}$$

注：显然当 $y = 0$ 时也满足原方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$。若允许常数 $C = 0$，则 $y = Ce^{x^2}$ 能涵盖情况 $y = 0$。因此，通解为 $y = Ce^{x^2}$（C 为任意常数）。

随堂练习：独立体验对数化简

练即
习时

练习 7.1.5： 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 的通解。

解：

1. **分离变量** $(x \neq 0, y \neq 0)$:
   $x\mathrm{d}y = -y\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x$
2. **两端求积分：**
   $\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1$
3. **整理化简：**
   将常数写为 $C_1 = \ln|C| \quad (C \neq 0)$
   $\ln|y| = \ln|x^{-1}| + \ln|C| \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$
   即 $y = \frac{C}{x} \Rightarrow xy = C$。
   （当 $y = 0$ 时，也包含在内，此时 $C = 0$）。

- **本节核心要点**

  1. **重要概念**：微分方程的阶数、解（通解、特解）及其几何意义。
  2. **核心方程结构**：可分离变量方程 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$。
  3. **核心求解策略**：**分离变量** $\rightarrow$ **两端求积分** $\rightarrow$ **整理出通解**。

- **章节思考预告**

> **思考 1**：并非所有变量都能被轻松分离，如果方程形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$，我们该如何求解?
> **思考 2**：进一步的，形如 $y' + p(x)y = q(x)$ 的“一阶线性微分方程”存在怎样的通用求解公式?

作业任务

- **课后练习**：完成第七章习题一（涉及微分方程概念判断与可分离变量方程计算）。
- **新课预习**：齐次方程、一阶线性微分方程及常数变易法。

“自然界之书是以数学的语言写成的。”

— 伽利略