



廈門大學嘉庚學院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

7-2 一阶线性微分方程

第七章 微分方程

张振

信息科学与技术学院

在上节课中，我们学习了可分离变量的微分方程，其特点是能将包含 x 和 y 的项分别移至等号两端。

但如果遇到如下方程：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$$

观察发现，无论怎样进行代数变形，都无法将 x 和 y 完全分离到等式两边。对于这类更复杂的方程，我们需要引入新的概念和求解技巧：

- 齐次方程（变量代换法）
- 一阶线性微分方程（常数变易法）

1. 齐次方程的基本概念



- 定义

如果一阶微分方程可化为如下形式：

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

则称该方程为齐次方程。

- 核心特征

方程右侧的函数 φ 可以完全表示为变量比例 $\frac{y}{x}$ 的函数。

- 示例

方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ 可变形为 $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$ ，符合齐次方程定义。

- 求解核心：通过引入新变量，将其转化为可分离变量的方程。

- 步骤：

1. 引入新变量：令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = ux$ 。

2. 求导替换：对 x 求导，得 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 。

3. 代入原方程：将上式及 $\frac{y}{x} = u$ 代入原齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 中，得：

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

4. 分离变量：移项得到 $x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$ ，分离变量后得：

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (\text{假设 } \varphi(u) - u \neq 0)$$

5. 两端积分并回代 $u = \frac{y}{x}$ 求得原方程的解。

$x-y=3$
 $x+y=3$
 $y=bx+a$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$



即时练习

引例回顾：求开头引入的齐次方程通解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

“

解：

1. 变量代换：

令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = ux$ ， $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 。

2. 代入并分离变量：

原方程化为： $u + x \frac{du}{dx} = 1 + u$

相减抵消 u ： $x \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

3. 两端积分并回代：

积分得： $u = \ln|x| + C$

回代 $u = \frac{y}{x}$ ，得到通解：

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x(\ln|x| + C)$$

$v = \frac{y}{x}$
 $x + y = 3$
 $y = 3 - x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$



即时练习

例 7.2.1：求下列齐次方程的通解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$



练习解析：齐次方程求解（解答）



解：

方程已呈齐次方程标准形式 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 。

1. 变量代换：

令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = ux$ ，对其求导得 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 。

2. 代入并分离变量：

代入原方程：

$$u + x \frac{du}{dx} = u + \tan u$$

化简并分离变量得：

$$\frac{1}{\tan u} du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \cot u du = \frac{1}{x} dx$$

3. 两端积分：

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |\sin u| = \ln |x| + C_1$$



4. 化简常数：

令 $C_1 = \ln |C|$ ($C \neq 0$)，则有：

$$\ln |\sin u| = \ln |Cx| \Rightarrow \sin u = Cx$$

5. 回代原变量：

将 $u = \frac{y}{x}$ 代回上式，得到通解（隐式）：

$$\sin \left(\frac{y}{x} \right) = Cx$$

例 7.2.2：求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = y(\ln y - \ln x)$ 的通解。

“

练习解析：齐次方程进阶求解（解答）



解：

注意到对数运算性质 $\ln y - \ln x = \ln \frac{y}{x}$ ($x, y > 0$)。

将原方程两边同除以 x ，可变形为标准齐次方程：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \left(\frac{y}{x} \right)$$

1. 变量代换：

令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = ux$ ，对其求导得 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 。

2. 代入并分离变量：

代入上式得到：

$$u + x \frac{du}{dx} = u \ln u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = u(\ln u - 1)$$

分离变量得：

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

3. 两端积分：

注意到 $\frac{du}{u} = d(\ln u)$ ，故有：

$$\int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + C_1$$

4. 化简并回代变量：

令 $C_1 = \ln |C|$ ($C \neq 0$)，去绝对值和对数可得：

$$\ln u - 1 = Cx \Rightarrow \ln u = Cx + 1$$

取指数得 $u = e^{Cx+1}$ 。

回代 $u = \frac{y}{x}$ ，最终解得通解为：

$$y = xe^{Cx+1}$$

2. 一阶线性微分方程基本概念



- 定义

未知函数 y 及其一阶导数 y' 的最高次数均为 1 的微分方程。

- 标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

其中，线性体现在 y' 和 y 是线性的（无平方、无交叉项等）， $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均为仅与 x 有关的已知连续函数。

- 分类

- 当 $Q(x) \equiv 0$ 时： $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ ，称为齐次线性方程。
- 当 $Q(x) \neq 0$ 时：称为非齐次线性方程。

(注：此处的“齐次”是指方程右端自由项为零，与前文利用 y/x 代换的齐次方程概念不同)

对于一阶线性的齐次方程：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

它本质上是一个可分离变量的方程，利用上节课的方法可直接求解：

1. 分离变量： $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$
2. 两边积分： $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$
3. 求出积分： $\ln |y| = -\int P(x)dx + C_1$
4. 化简并整理常数：

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

这就是一阶齐次线性微分方程的通解。

例题 7.2.3：齐次线性方程求解



例 7.2.3：求一阶齐次线性微分方程 $y' - \frac{2}{x+1}y = 0$ 的通解 ($x > -1$)。

解：

匹配标准形 $y' + P(x)y = 0$ ，可知 $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ 。

1. 分离变量：

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1} dx$$

2. 两端积分：

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+1} dx \implies \ln |y| = 2 \ln(x+1) + C_1$$

3. 化简常数：

$$\ln |y| = \ln(x+1)^2 + \ln |C| \implies y = C(x+1)^2$$

本例中也可以直接背诵公式 $y = Ce^{-\int(-\frac{2}{x+1})dx}$ 求解。

如果要求解非齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 怎么办？

数学家拉格朗日提出了一个巧妙的思想：**常数变易法**。

- **核心思想**

既然齐次方程的通解是 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ ，其中 C 是常数。

假若将常数 C 变易为关于 x 的未知函数 $C(x)$ ，试图寻找形式为：

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

的解是否能满足非齐次方程。

- **求解过程简述**

将上述假定的 y 以及其导数 y' 整体代入非齐次方程，方程总是会奇妙地消除掉包含 $C(x)$ 的项，只留下针对 $C'(x)$ 的可积表达式。

将 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 。

(为书写简便, 记积分项为 $I(x) = \int P(x)dx$)

求导得: $\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-I(x)} - C(x)P(x)e^{-I(x)}$ 。

代入方程:

$$\left[C'(x)e^{-I(x)} - C(x)P(x)e^{-I(x)} \right] + P(x) \left[C(x)e^{-I(x)} \right] = Q(x)$$

中间两项相互抵消:

$$C'(x)e^{-I(x)} = Q(x) \Rightarrow C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

两端积分求出 $C(x)$:

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

经过推导，我们将 $C(x)$ 的表达式代回最初的设想公式 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 中，得到：

“ 一阶线性非齐次微分方程的通解公式：

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

”

记忆诀窍：

- 前面是 $e^{-\int P(x)dx}$ （自带齐次解的影子）。
- 括号内是 $Q(x)$ 与抵消因子 $e^{\int P(x)dx}$ 乘积的积分，加上常数 C 。



$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$
 $R = \frac{2}{x+1}y - (x+1)^3$
 $x+y=3 \quad y=3-x$
 $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}$

“例 7.2.4：求一阶线性非齐次微分方程 $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ 的通解 ($x > -1$)。 ”

解：

匹配标准形得 $P(x) = -\frac{2}{x+1}$, $Q(x) = (x+1)^3$ 。

步骤 1：计算积分因子 $e^{\int P(x)dx}$

$$\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x+1}dx = -2\ln(x+1) = \ln(x+1)^{-2}$$

故积分因子为 $e^{\ln(x+1)^{-2}} = (x+1)^{-2}$ 。

步骤 2：代入通解公式，计算核心积分

通解公式： $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$

$$y = (x + 1)^2 \left[\int (x + 1)^3 \cdot (x + 1)^{-2} dx + C \right]$$

奇妙的事情发生了，括号内的核心积分被极大简化！

$$y = (x + 1)^2 \left[\int (x + 1) dx + C \right]$$

$$y = (x + 1)^2 \left[\frac{1}{2}(x + 1)^2 + C \right]$$

通解为： $y = \frac{1}{2}(x + 1)^4 + C(x + 1)^2$ 。



即时练习

例 7.2.5：求以下一阶线性微分方程的通解：

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 \sin x$$

“

解：已知方程为标志的一阶线性型，其中 $P(x) = -\frac{1}{x}$ ， $Q(x) = x^2 \sin x$ 。

【板块一：求积分因子】（提取 $e^{\int P(x)dx}$ ）

$$\int P(x)dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\ln|x|$$

故正向积分因子为 $e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ ，逆向因子（最外侧项）为 $e^{\ln x} = x$ 。

【板块二：求核心极大积分】（处理 $\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$ ）

利用多项式乘法化简：

$$I = \int x^2 \sin x \cdot \frac{1}{x} dx = \int x \sin x dx$$

使用分部积分法处理：

$$\int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x$$

【板块三：总装通解】

将板块一和板块二的结果拼装入外层通解架构：

$$y = (\text{逆向因子}) \times [(\text{核心积分}) + C]$$

$$y = x [(\sin x - x \cos x) + C]$$

最终代回求得通解为：

$$y = Cx + x \sin x - x^2 \cos x$$

解法二：积分因子法

构造目标：寻找 $\mu(x)$ ，使方程两端乘以 $\mu(x)$ 后，左端可凑成全导数：

$$\frac{d}{dx} [\mu(x) y] = \mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu'(x) y$$

对比原方程左端 $\mu \frac{dy}{dx} + \mu P(x)y$ ，须满足 $\mu'(x) = P(x)\mu(x)$ ，分离变量积分得：

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

代入 $P(x) = -\frac{1}{x}$ ，取特解（不带绝对值和常数）：

$$\mu(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

方程两端乘以 $\frac{1}{x}$ ，左端恰好凑成全导数：

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y}{x} \right] = x \sin x$$

对两端积分，右端用分部积分法处理：

$$\frac{y}{x} = \int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C$$

两端乘以 x ，最终通解与解法一完全一致：

$$y = x(\sin x - x \cos x + C) = Cx + x \sin x - x^2 \cos x$$

• 本节核心要点

1. 齐次方程：形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ，关键在于令 $u = \frac{y}{x}$ 进行变量代换，转化为可分离变量方程。
2. 一阶线性微分方程：标准型为 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 。
3. 常数变易法：用未知函数 $C(x)$ 替换常数 C 的思想极具独创性，最终导出了通解公式，是解决非齐次方程的利器。

• 章节思考预告

“思考：上述方程都是直接通过一阶积分得到显式解，当我们的方程变得更高阶（例如二阶常系数齐次线性方程）时，还会像这样简单吗？解的结构会有什么变化？”

作业任务

- 复习与练习：牢记一阶线性方程的通解公式结构，熟练通过 $u = \frac{y}{x}$ 代换求解齐次方程；完成课后配套习题。
- 新课预习：可降阶的高阶微分方程的基本解法思想。

■ **“在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要。”**

— *Г. Cantor* (康托尔)