厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

7-3 可降阶的高阶微分方程

第七章 微分方程

张 振
信息科学与技术学院

引言：为什么需要“降阶”?

在之前的学习中，我们集中探讨了**一阶微分方程**（可分离变量、一阶线性等）的求解套路。

但自然界的问题往往涉及更高阶的导数：

- 例如：牛顿第二定律 $F = ma$。写成微分形式即 $\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$。
- 这是一个含二阶导数 $\boldsymbol{x}''$ 的方程。

核心思想：
对于某些特殊结构的**高阶微分方程**，我们可以通过适当的**变量代换**，将其转化为较低阶（通常是一阶）的微分方程，从而利用已有的知识进行求解。这种方法称为**降阶法**。

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型及其降阶

- **方程特征**
  方程只有最高阶导数 $y^{(n)}$ 和自变量 x，即：

$$y^{(n)} = f(x)$$

- **降阶策略：连续积分法**
  既然 $y^{(n)}$ 是 $y^{(n-1)}$ 的导数，那么对等式两边连续求积分 n 次即可还原出函数 y。

1. 一次积分：$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$
2. 二次积分：$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\mathrm{d}x + C_1\right)\mathrm{d}x + C_2$
3. … 如此重复 n 次。

例 7.3.1：求微分方程 $y'' = e^{2x} + \cos x$ 的通解。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

解：

原方程为 $y'' = e^{2x} + \cos x$，连续两次积分即可。

1. **第一次积分**（降为一阶）：

$$y' = \int (e^{2x} + \cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + \sin x + C_1$$

2. **第二次积分**（求得通解）：

$$y = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + \sin x + C_1\right)\mathrm{d}x$$

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} - \cos x + C_1 x + C_2$$

结论：因为包含了两个独立常数 C_1, C_2，故此即为该二阶方程的**通解**。

2. $y'' = f(x, y')$ 型（不显含 y）

- **方程特征**

  方程中**只出现**导数 y', y'' 和自变量 x（**唯独不见了未知函数 y 本身**）：

$$y'' = f(x, y')$$

- **降阶策略：将一阶导数视作新函数**

  1. 令 $y' = p$，那么 y'' 就等于 p'（即 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$）。
  2. 代入原方程，问题转化为关于 p 的**一阶微分方程**：
  $$p' = f(x, p)$$
  3. 求出 $p(x, C_1)$ 后，因为 $p = y'$，最后再对 x 积分一次：
  $$y = \int p(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

例 7.3.2：求方程 $xy'' + y' = 0$ 的通解，并讨论其物理/几何意义。

解：

方程 $xy'' + y' = 0$ 中不含有 y，符合不显含 y 的类型。

1. **变量代换**：
   令 $y' = p$，则 $y'' = p'$。原方程变为 $xp' + p = 0$

2. **分离变量求解** p：

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -p \implies \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

   两边积分：$\ln|p| = -\ln|x| + C_0 \implies p = \frac{C_1}{x}$

3. **求原函数** y：

$$y' = \frac{C_1}{x} \implies y = \int \frac{C_1}{x}\mathrm{d}x = C_1 \ln|x| + C_2$$

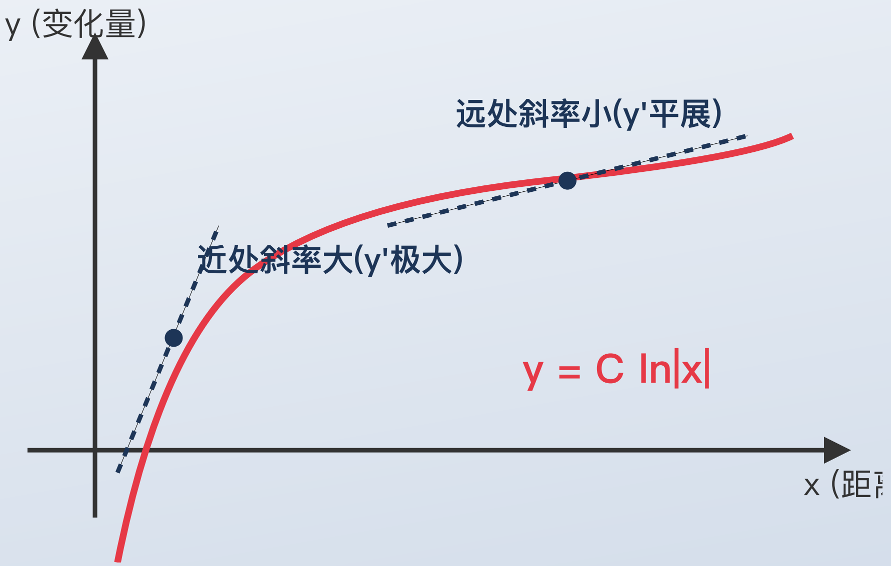
   通解为 $y = C_1 \ln|x| + C_2$。

为何通解 $y = C_1 \ln|x| + C_2$ 非常重要?

1. 几何特征：导数反比定律

原方程可化归为 $xy' = C_1$，即 $y' \propto \frac{1}{x}$。

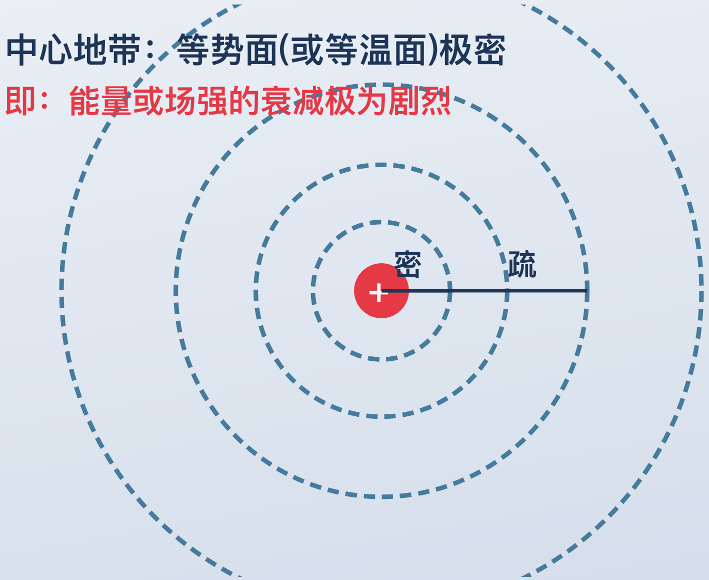
直观理解：切线斜率（代表变化率）与坐标位置距离**成反比**。就如同一处平缓展开的山地地形：离原点中心越近，坡度越陡峭剧烈；离原点越远，坡度就越来越平缓。



2. 物理与工程模型：稳态场分布

若将 x 视作径向距离 r，y 视作电势或温度，该方程对应极坐标下的一维拉普拉斯方程，用于描述**向外辐射衰减的物理量**：

- **输电电缆的电场**：带电导线周围的电势并非均匀下降。越靠近内芯，电压变化率极大（极易发生高压击穿）；外层则较为平缓安全。
- **圆管的热传导**：供暖管道的内外壁温差也是以对数形式递减。



3. $y'' = f(y, y')$ 型（不显含 x）

- **方程特征**
  方程中**没有自变量** x，只包含未知函数 y 和它的前两阶导数：

$$y'' = f(y, y')$$

- **降阶策略：利用复合函数链式法则**

  1. 依然令 $y' = p$，但此时将 p 看作关于 y 的函数（$p = p(y)$）。
  2. 利用链式法则改写 y''：

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

  3. 代入原方程，转化为以 y 为自变量，以 p 为未知函数的**一阶微分方程**：

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

例题 7.3.3：不显含 x 的方程

例 7.3.3：求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 的通解。

解：

方程中没有出现自变量 x。

1. **变量代换与链式法则**：
   令 $y' = p$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。方程变为：

$$y \cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0$$

2. **化简求 p（此步以 y 为自变量）**：
   若 $p \neq 0$，约去 p 有 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p = 0$。
   分离变量：$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{y} \implies \ln|p| = -\ln|y| + C_0 \implies p = \frac{C_1}{y}$

3. **还原求 y**：
   已知 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{C_1}{y}$，分离变量：$y\mathrm{d}y = C_1\mathrm{d}x$
   积分得：$\frac{1}{2}y^2 = C_1x + C_2$。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

例 7.3.4：求初值问题的解：

$$\begin{cases} yy'' = (y')^2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

解：

方程缺 x，令 $y' = p$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。

1. **第一次降阶**：代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2$。
   分离变量并积分：$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \implies \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| \implies p = C_1 y$。
   【立刻利用初值定常数】：将 $x = 0$ 时的初值 $y = 1, y' = p = 1$ 代入，得 $1 = C_1 \cdot 1 \implies C_1 = 1$。
   因此，得到一阶微分方程：$y' = y$。

2. **求解原函数**：
   分离变量积分：$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x \implies \ln|y| = x + C_2 \implies y = Ce^x$。
   【再次利用初值定常数】：代入 $y(0) = 1$，得 $1 = Ce^0 \implies C = 1$。
   最终特解为：$y = e^x$。

压轴挑战：综合几何条件的微分方程

例 7.3.5：已知某曲线方程 $y = f(x)$ 满足微分方程 $1 + (y')^2 = 2yy''$，且与另一曲线 $y = e^{1-x}$ 相切于点 $(1, 1)$，求该曲线的方程。

解：本题方程仍属“缺 x”型微分方程，核心难点在于**解译几何暗语**。

【板块一：破解相切几何条件】

“相切于点 $(1,1)$” 包含两层数学含义：

1. **经过定点**：即有初值 $y(1)=1$。
2. **在该点导数相等**（斜率一致）：曲线 $y=e^{1-x}$ 在 $x=1$ 处的导数为 $y'=-e^{1-x}\big|_{x=1}=-1$ 。因此，未知曲线在该点的斜率同为 -1，即产生第二个初值条件：$y'(1)=-1$。

几何条件完美转化为代数初始条件：$\begin{cases} y(1)=1 \\ y'(1)=-1 \end{cases}$

【板块二：第一次降阶与定常】

令 $y' = p$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。方程化为 $1 + p^2 = 2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。

分离变量得：$\frac{2p}{1+p^2}\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}y}{y}$。

两边积分：$\ln(1 + p^2) = \ln y + \ln C_1 \implies 1 + p^2 = C_1 y$。

将初值 $y = 1, p = y' = -1$ 代入：$1 + (-1)^2 = C_1 \cdot 1 \implies C_1 = 2$。

得到 $1 + p^2 = 2y$，即 $y' = p = \pm\sqrt{2y - 1}$。

【判定正负分支】：由初值 $y'(1) = -1 < 0$ 可知，必须选择负号分支：

$$y' = -\sqrt{2y - 1}$$

【板块三：第二次积分与求解曲线】

已知一阶方程 $y' = -\sqrt{2y-1}$，继续分离变量：

$$-\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y-1}} = \mathrm{d}x$$

两边同时积分：$-\sqrt{2y-1} = x + C_2$。

最后一次将初值 $x=1, y=1$ 代入：

$-\sqrt{2(1)-1} = 1 + C_2 \implies -1 = 1 + C_2 \implies C_2 = -2$。

因此 $-\sqrt{2y-1} = x-2$。两边平方并解出 y:

$$2y-1 = (x-2)^2 \implies 2y = (x-2)^2 + 1$$

最终曲线方程为：$y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$。

- **可降阶高阶方程的三大类型与破解之道：**

  1. $y^{(n)} = f(x)$：连续积分法（最直白）。
  2. **缺** y $(y'' = f(x, y'))$：令 $y' = p$，转化成关于 (x, p) 的一阶方程。
  3. **缺** x $(y'' = f(y, y'))$：令 $y' = p$，用链式法则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 转化成关于 (y, p) 的一阶方程。

- **核心密码：**

> 无论是哪种缺省，**降阶法的本质就是通过 $y' = p$ 重定义变量，强行消去方程中的一阶维度，**将其转化为熟悉的一阶微分方程来处理。

作业任务

- **练习环节**：完成课后书本相关“可降阶高阶微分方程”练习题，并着重分辨“缺 x”和“缺 y”时 y'' 代换的巨大区别。
- **新课预习**：下节课我们将探讨《二阶线性微分方程解的结构》，揭秘函数解如何进行叠加组合！

“降一步海阔天空，复杂问题往往源于维度的重叠。”