厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

7-4 二阶线性微分方程解的结构

第七章 微分方程

张 振

信息科学与技术学院

引言：前序求解思路回顾

方程大类	方程类型	典型形式	核心求解思想
一阶	最简单情形	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$	直接两边同时积分
	可分离变量	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$	分离变量，两边积分
	齐次方程	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$	换元 $u = \frac{y}{x}$，化为可分离变量
	线性方程	$y' + P(x)y = Q(x)$	常数变易公式，积分因子法
高阶	最简单高阶	$y^{(n)} = f(x)$	连续积分 n 次
	可降阶方程	$y'' = f(x, y')$ 或 $y'' = f(y, y')$	代换降阶（设 $p = y'$）

> **思考**：以上均为“纯粹的硬计算”，缺乏对“解的整体结构”的认知。

什么是二阶线性微分方程?

未知函数 y 及其导数 y', y'' 均为**一次方**：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

- **分类**：
  - 若 $f(x) \equiv 0$：**二阶线性齐次微分方程**。
  - 若 $f(x) \neq 0$：**二阶线性非齐次微分方程**。

> **本课核心**：如果已知几个特解，能否像拼乐高一样，组合出囊括所有情况的**通解**？

- **定理 1（叠加原理）**

> 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解，那么它们的线性组合 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍然是该方程的解（其中 C_1,C_2 为任意常数）。

- **追问：这是通解吗？**
  - 二阶方程的通解必须包含**两个独立的任意常数**。
  - 如果 y_1,y_2 之间存在倍数关系（即“线性相关”），组合出的解只能等效为一个常数，**不能**作为通解。

1. 线性相关与线性无关

为了保证 y_1, y_2 能构成通解，我们需要它们在本质上是“不一样的”。

- **线性相关**

> 如果存在不全为零的常数 k_1, k_2，使得 $k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0$ 成立，称它们线性相关。
> **直观理解**：两个函数成比例，即 $\frac{y_1}{y_2} \equiv C$（常数）。

- **线性无关**

> 如果上述比例不为常数，则称它们线性无关。

- **定理 2（齐次通解定理）**

> 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程的**两个线性无关特解**，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是该方程的通解。

即时练习

【单选题】 以下函数组中，线性相关的是（　　）

A. e^x, e^{-2x}

B. $e^x\sin x, e^x\cos x$

C. x, x^2

D. $\cos^2 x - 1, 3\sin^2 x$

解：寻找比例是否为常数。

- **选项 A**：$\frac{e^x}{e^{-2x}} = e^{3x}$（非常数），线性无关。
- **选项 B**：$\frac{e^x \sin x}{e^x \cos x} = \tan x$（非常数），线性无关。
- **选项 C**：$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$（非常数），线性无关。
- **选项 D**：
  利用三角恒等式：$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$。
  将两函数作比：
  $$\frac{-\sin^2 x}{3\sin^2 x} = -\frac{1}{3} \quad (\text{常数})$$
  因此它们成比例。

答案：D。

二、二阶线性非齐次微分方程解的结构

对于带自由项 $f(x)$ 的方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$，其结构同样巧妙。

- **定理 3（非齐次通解定理）**

> 设 $y^*(x)$ 是二阶**非齐次**方程的任意一个**特解**；
> 设 $Y(x)$ 是其对应**齐次方程**（去掉了 $f(x)$）的**通解**。
> 那么，原非齐次方程的**通解**为：
> $$y = Y(x) + y^*(x)$$

- **记忆口诀：非齐次通解 = 对应的齐次通解 + 自身特解。**

推论（特解的进一步结构）

在非齐次定理的基础上，我们可以反推：

- 如果有两个非齐次方程的特解 y_1^* 和 y_2^*：
  将它们代入方程并相减，右端的 $f(x)$ 会抵消，得到：

$$(y_1^* - y_2^*)'' + P(x)(y_1^* - y_2*)' + Q(x)(y_1^* - y_2^*) = 0$$

- **重要结论**：

> **非齐次方程的两个特解之差，是对应齐次方程的解！**

即时练习

【填空题】

已知 $y_1 = x^2, \quad y_2 = e^{-x} + x^2, \quad y_3 = e^{3x} + x^2$
是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个特解。

则 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解为：______________________
$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解为：______________________

练习 2 解析

解： 利用推论“特解之差为齐次解”。

1. **寻找齐次解**：

$$y_2 - y_1 = e^{-x}$$
$$y_3 - y_1 = e^{3x}$$

所以 e^{-x} 和 e^{3x} 均是对应齐次方程的解。检查发现 $\frac{e^{-x}}{e^{3x}} = e^{-4x}$，不为常数，因此线性无关。

2. **写出齐次方程通解**：

$$Y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

3. **写出非齐次方程通解**：
任取一个已知特解（例如 $y_1 = x^2$）加上齐次通解即可：

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + x^2$$

即时练习

【单选题】

已知 $y_1 = x^3 e^{-2x}$， $y_2 = (x + x^3)e^{-2x}$， $y_3 = (1 + 2x + x^3)e^{-2x}$ 是二阶非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个特解。则该方程的通解是（　　）

A. $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$

B. $C_1(y_1 + y_2) + C_2(y_2 + y_3) + y_1$

C. $C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_1 + y_3 - 2y_2) + y_1$

D. 以上选项都不对

解：结合解的结构与特解作差法。

1. **求齐次解**：

   - 特解之差 $y_2 - y_1 = xe^{-2x}$。
   - 特解之差 $y_3 - y_2 = (1+x)e^{-2x}$。
     这两个函数成比例吗？
     $\frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}$（非常数），**相互线性无关！**

2. **重构组合**：

   观察选项 **C**：$C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_1 + y_3 - 2y_2) + y_1$。
   其中 $y_1 + y_3 - 2y_2 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = (1+x)e^{-2x} - xe^{-2x} = e^{-2x}$，这也是一个齐次解。
   此时两个基础解为 xe^{-2x} 与 e^{-2x}，显然线性无关。
   任意选取一个已有特解（如 y_1），即构成了标准的非齐次通解形式。

答案：**C**。

本章总结与课后思考

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- **大纲核心：解的结构定律**

  1. **齐次解叠加原理**：线性无关特解的线性组合构成通解。
  2. **非齐次解结构**：通解 = 对应齐次通解 + 自身特解。
  3. **实用推论**：非齐次方程的两个特解之差即为对应的齐次方程解。

- **思考预告**

> 结构理论告诉了我们通解的“积木配方”，但寻找这几个“基础积木（特解）”依然困难。对于**常系数**线性微分方程，能否有一套更机械化、无需猜测的代数方法？这就是下一节的主题。

课后任务

- **复习**：结合本节例题，再次体会“解的结构”如何将微分方程的求解转化为代数结构的拼搭。
- **预习**：预习 7-5 节 **常系数齐次线性微分方程**。

“结构先于计算。一旦看清了骨架，血肉便自会生长。”