厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

7-5 二阶常系数齐次线性微分方程

第七章 微分方程

张 振
信息科学与技术学院

引言：从设定特解到特征方程

上一节讨论了“解的叠加原理”。
为了构建二阶齐次线性微分方程的通解，首要任务是寻找两个**线性无关**的特解。

本节研究一类特殊形式的方程：**系数均为常数的齐次线性微分方程**。

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

分析：考察指数函数 $y = \mathrm{e}^{rx}$。其各阶导数为 $y' = r\mathrm{e}^{rx}$，$y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$。代入方程后，便于提取公共因子。

1. 特征方程的推导

- 将指数函数 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 代入原方程 $y'' + py' + qy = 0$：

$$(r^2\mathrm{e}^{rx}) + p(r\mathrm{e}^{rx}) + q(\mathrm{e}^{rx}) = 0$$

- 提取因子 e^{rx}：

$$\mathrm{e}^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

- 由于 $\mathrm{e}^{rx} \neq 0$，要求多项式须恒等于 0：

$$r^2 + pr + q = 0$$

> **定义**
> 代数方程 $r^2 + pr + q = 0$ 称为微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的**特征方程**。
> 至此，微分方程的求解过程转化为求解代数方程的根。

根据一元二次方程判别式 $\Delta = p^2 - 4q$ 的不同，特征根产生 3 种情形，对应微分方程 3 种通解结构：

情形一：两个不相等的实数根 （$\Delta > 0$）

- 特征方程具两相异实根 r_1, r_2。
- 由此得到两个线性无关的特解：$y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$， $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$。
- 原方程通解为：

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$$

练即时

求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解。

解：

1. **写出特征方程：**
   将 y'' 换成 r^2，y' 换成 r，y 换成 1。
   $$r^2 - 5r + 6 = 0$$
2. **求解特征根：**
   因式分解得 $(r-2)(r-3) = 0$。
   解得两个不相等的实数根：$r_1 = 2, r_2 = 3$。
3. **写出通解：**
   对应上述通解结构，解为：
   $$y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}$$

情形二：两个相等的实数根 （$\Delta = 0$）

- 特征根表现为二重根：$r_1 = r_2 = r = -\frac{p}{2}$。
- $y_1 = \mathrm{e}^{rx}$ 为其中一个解。寻找与其呈线性无关的第二个解：
- 可乘入自变量 x 予以构造，即 $y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$，可证明其亦满足该方程。
- 原方程通解为：

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{rx}$$

> *(注：缺省的独立解依据常数变易法推导而得。)*

练即 时

求方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 4$ 的特解。

解：

1. **特征方程得二重根：**
   $r^2 - 4r + 4 = 0 \implies (r-2)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = 2$。
2. **写出通解：**
   $$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x}$$
3. **结合初值求常数：**
   通解求导：$y' = C_2\mathrm{e}^{2x} + 2(C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x}$。
   代入 $y(0) = 1 \implies C_1 = 1$。
   代入 $y'(0) = 4 \implies C_2 + 2C_1 = 4 \implies C_2 = 2$。
4. **特解结论：**
   $$y = (1 + 2x)\mathrm{e}^{2x}$$

2. 特征根的三种情形与通解（续 2）

情形三：一对共轭复数根 （$\Delta < 0$）

- 特征方程具共轭复根：$r_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$。
- 根据欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 转换指数形式。
- 取实数分离的各项作为线性无关解。
- 原方程通解为：

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

> **说明**：实部 α 位于指数项，虚部 β 体现为三角函数的频率系数。

练即时

求微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解。

练习解析：共轭复根的情形（解答）

解：

1. **写出特征方程：**

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

2. **求出共轭复根：**
   因为 $\Delta = 2^2 - 4(5) = -16 < 0$。
   根据求根公式：$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$。
   实部 $\alpha = -1$，虚部 $\beta = 2$。

3. **写出通解形式：**
   针对共轭复根结构 $y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$：

$$y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

本节总结：特征方程求解流程

求解二阶常系数齐次非退化方程常规步骤：

1. **构造特征方程：** $r^2 + pr + q = 0$
2. **计算代数根：** 求判别式 $\Delta = p^2 - 4q$，解出 r_1, r_2。
3. **组合通解结构：**
   - 互异实根（$r_1 \neq r_2$）：$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$
   - 二重实根（$r_1 = r_2 = r$）：$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{rx}$
   - 共轭复根（$r_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$）：$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

课表进度任务

- **习题**：作业集：常系数齐次线性微分方程
- **预习**：二阶常系数非齐次线性微分方程
- **知识拓展**：怎样求微分方程的通解。