



廈門大學嘉庚學院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

7-6 二阶常系数非齐次线性微分方程

第七章 微分方程

张振

信息科学与技术学院

根据第 4 节的方程解结构谱系，二阶非齐次线性方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解结构为：

$$y = Y + y^*$$

- Y (齐次方程通解)：对应右端为 0 的情境，采用特征根法求解。
- y^* (非齐次方程特解)：寻找在非齐次方程下特有项 $f(x)$ 的解析解。

本节系统讨论**待定系数法**。其基本思想为预设解的函数形式，代入方程确定待定系数。
核心依据：线性常系数微分操作下，指数、多项式及三角函数的基本结构保持形似。

1. $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型特解形式设定

当非齐次项表现为指数函数与多项式的乘积形式：

$$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$$

其中 $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式， λ 为常数参数。

特解 y^* 设定方式：

- 初等多项式与指数函数求导具有形式封闭性，该结构提示解呈对应形式。
- 设其特解一般形式为：

$$y^* = e^{\lambda x} Q_n(x)$$

其中 $Q_n(x)$ 为需要确定的 n 次多项式结构形式，系数待定。

2. $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型特解形式设定 (含重根情形)

注：解形式与齐次解的线性相关性判定

当上一步预设的解形式 $y^* = e^{\lambda x} Q_n(x)$ 为左端齐次方程解空间一员时，将其代入原式左侧则自然等于 0，这不能等效右侧之 $f(x)$ 函数表现。这一问题对应于系统动力学中的共振现象。

修正形式：系统性引入自变量多项式因子 x^k 。

特解设定公式调整为：

$$y^* = x^k e^{\lambda x} Q_n(x)$$

- **参数 k 的确定法则：** 比对 λ 与特征方程的根情况：
 - 若 λ 非特征根：预定 $k = 0$
 - 若 λ 为单特征根：设定 $k = 1$
 - 若 λ 为二重特征根：设定 $k = 2$



即时练习

针对微分方程 $y'' - 5y' + 6y = f(x)$ ，不用真正求解系数，
请仅写出当 $f(x)$ 为以下情况时，预定特解 y^* 对应的确切结构形式：

1. $f(x) = xe^x$
2. $f(x) = e^{2x}$

“

解：

首先求齐次特征根： $r^2 - 5r + 6 = 0 \implies r_1 = 2, r_2 = 3$ 。

1. 当非齐次项 $f(x) = xe^x$ 时：

- 对比形式 $P_n(x)e^{\lambda x}$ ，此时 $\lambda = 1$ ， $P_n(x) = x$ （一次多项式）。
- 检验 λ ：因为 $\lambda = 1$ 非特征根（ $1 \neq 2, 1 \neq 3$ ），所以无相关性修正， $k = 0$ 。
- $Q_n(x)$ 基于最高次数要求被设定为： $(Ax + B)$ 。
- 特解形式： $y^* = (Ax + B)e^x$

2. 当非齐次项 $f(x) = e^{2x}$ 时：

- 此时 $\lambda = 2$ ， $P_n(x) = 1$ （零次常数多项式）。
- 检验 λ ：因为 $\lambda = 2$ 与单特征根 r_1 吻合，故引入自变量一次幂组合相关修正，得 $k = 1$ 。
- $Q_n(x)$ 形式为常数参数： A 。
- 特解形式： $y^* = x^1 \cdot A \cdot e^{2x} = Axe^{2x}$

3. $f(x) = e^{\lambda x} [P_l^{(1)}(x) \cos \omega x + P_n^{(2)}(x) \sin \omega x]$ 型

当非齐次项含有三角函数具有振荡性质时，对应特解方程也兼具该波动成分。

特解通用设定表达式：

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$$

- 参数 m 之界定：取组合两侧多项式的最高次极大阶数决定，即 $m = \max(l, n)$ 。
- 因子 k 之界定：检验相关复化参数 $\lambda + \omega i$ 与该特征根的一致性：
 - 若 $\lambda + \omega i$ 并非其实根： $k = 0$
 - 若 $\lambda + \omega i$ 正好为其单特征根： $k = 1$ （对于此类型不含重数阶可能）



判断并设定微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的特解形式。

“



解：

1. 齐次方程代数特征根：

方程 $y'' + y = 0$ 其基本特征方程对应 $r^2 + 1 = 0 \implies r_{1,2} = \pm i$ 。

2. 分析非齐次端项 $f(x) = \sin x$ ：

- 整理标准参照系映射，有 $f(x) = e^{0 \cdot x}(0 \cdot \cos 1 \cdot x + 1 \cdot \sin 1 \cdot x)$ 。
- 参量提取： $\lambda = 0, \omega = 1$ ，最高次多项式取指代常数为 0 次阶。
- 虚测试因子复数转化： $\lambda + \omega i = 0 + 1i = i$ 。

3. 构建 y^* 函数形式：

- 因检验虚值参量 i 与其单特征参数耦合重叠定，故修正常项因子代数 $k = 1$ 。
- 目标多项式亦呈现稳定代数定阶为常数。
- 设定结构形制表现： $y^* = x(A \cos x + B \sin x)$ 。



- 待定系数法操作流程：

1. 参数提取（标定 λ, ω, n ）：分析微分方程右端函数确立具体解的基本特征参数群。
2. 特征对照（提取齐次代数根 r ）：由方程左侧构建其代数特有方程，进而解定其根系状况。
3. 架构拟定（落实参数 m, k 并建立模板）：将比对参数结果 λ 亦或是复合 $\lambda + \omega i$ ，校验并对照已有同级特有方程基准。于重合境况乘入一次或二次修正型变量自参量。展开其式则通过常数法得出参量 A, B 等待求因子。

课表进度任务

- **练习：**掌握“写出微分方程待定特解形式”的方法论要素并练习习作。执行常系数非齐次线性微分方程类型作业。相关待定实数需要独立核定完成以确认其结果完备型。
- **拓展：**课外涉及并阅读无穷级数求和问题在系统常数理论体系及物理特型下的交叉化原理分析内容。