第七章微分方程专题复习 (学生版)

MatNoble

2026 年 6 月 2 日

目录

复习导引

本讲义围绕期末复习中第七章的六类高频考点展开：

1. 概念相关：阶、通解、任意常数、函数线性无关；
2. 可分离变量的微分方程；
3. 一阶线性微分方程；
4. 可降阶的微分方程；
5. 二阶常系数齐次线性微分方程；
6. 二阶常系数非齐次线性微分方程。

1 考点一:概念相关

知识点汇总

1. **阶:**微分方程中出现的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶。

2. **通解:** n 阶微分方程的通解通常含有 n 个独立任意常数。

3. **特解:**由初始条件或边界条件确定任意常数后得到的解。

4. **线性微分方程:**关于未知函数 y 及其各阶导数 $y', y'', \cdots$ 均为一次,且它们之间不相乘、不复合非线性函数。

5. **齐次与非齐次:**线性方程右端为 0 时称为齐次方程;右端不为 0 时称为非齐次方程。

6. **初值条件:** n 阶方程通常需要 n 个独立初值条件来确定一个特解。

7. **线性无关:**若 $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n = 0$ 只在 $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ 时成立,则函数组线性无关。

经典例题讲解

1. 微分方程
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 3x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2xy = x + 2$$
的通解含有 ______ 个独立的任意常数。

2. 微分方程
$$(y'')^5 + 6y^{(4)} - 5x(y')^3 + x^8 = 2$$
是 ______ 阶微分方程。

例题变式

1. 方程 $y'' + xy' + \sin y = x$ 是不是线性微分方程?

2. 判断函数组 $\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{2x}$ 是否线性无关。

2 考点二:可分离变量的微分方程

知识点汇总

1. 标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

2. 核心步骤:

$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

3. 注意常数解:分离变量时若除以含 y 的因子,需留意该因子为 0 时是否给出常数解。

经典例题讲解

1. 求微分方程

$$y' \tan x = y$$

的通解。

例题变式

1. 求微分方程 $y' = 2xy$ 的通解。

2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ 的通解。

3 考点三:一阶线性微分方程

知识点汇总

1. 标准形式:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

2. 积分因子:

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

3. 齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

4. 通解公式:

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right].$$

5. 做题流程:先化为标准形式,再找 $p(x)$,算积分因子,最后代初值。

6. 若方程可整理为 $y' = f(x)y$,它既是一阶线性齐次方程,也可直接按可分离变量方程处理。

经典例题讲解

1. 求一阶微分方程

$$y' - 3x^2y = y, \qquad y(0) = 4$$

   的特解。

例题变式

1. 求微分方程 $y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x, y(0) = 0$ 的特解。

4　考点四:可降阶的微分方程

知识点汇总

1. 若方程形如
$$y^{(n)} = f(x),$$
则连续积分 n 次。

2. 若方程不含 y, 即形如 $F(x, y', y'') = 0$, 令
$$p = y', \qquad y'' = p'.$$
此时把 p 看作 x 的函数。

3. 若方程不含 x, 即形如 $F(y, y', y'') = 0$, 令
$$p = y', \qquad y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$
此时把 p 看作 y 的函数。

经典例题讲解

1. 微分方程
$$y''' = \mathrm{e}^{-x} + \sin x$$
的通解为____________________________________。

例题变式

1. 求微分方程

$$xy'' - y' = 0 \quad (x \neq 0)$$

   的通解。

2. 求微分方程

$$yy'' = (y')^2$$

   的通解。

5 考点五：二阶常系数齐次线性微分方程

知识点汇总

1. 标准形式：

$$y'' + py' + qy = 0.$$

2. 特征方程：

$$r^2 + pr + q = 0.$$

3. 解题关键：先写特征方程，再按特征根类型写通解；初值题最后代入 $y(0), y'(0)$ 解常数。

4. 两个不等实根 r_1, r_2：

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}.$$

5. 二重实根 r：

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{rx}.$$

6. 共轭复根 $\alpha \pm \beta i$：

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

经典例题讲解

1. 通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{x}$$

的二阶常系数齐次线性微分方程为 ______________。

2. 求微分方程

$$y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

的特解。

例题变式

1. 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解。

6 考点六：二阶常系数非齐次线性微分方程

知识点汇总

1. 非齐次线性方程通解结构：

$$y = y_h + y_p,$$

   其中 y_h 是对应齐次方程通解，y_p 是非齐次方程的一个特解。

2. 若已知同一个非齐次线性方程的两个特解 y_1, y_2，则 $y_1 - y_2$ 是对应齐次方程的解。

3. 若右端可分解为 $f_1(x) + f_2(x)$，可分别求两个特解 y_{p1}, y_{p2}，再取

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}.$$

4. 对常见右端

$$f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

   其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式，特解通常设为

$$y_p = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

   其中 $Q_m(x)$ 取为 m 次待定多项式。参数 k 按 λ 与特征根的关系确定：

λ 与特征根的关系	k	修正因子
λ 不是特征根	0	1
λ 是单特征根	1	x
λ 是二重特征根	2	x^2

   例如右端为 $(x+1)\mathrm{e}^x$ 时，$m = 1$，所以 $Q_m(x) = Ax + B$。

5. 对常见右端

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right],$$

   特解通常设为

$$y_p = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right],$$

其中 $m=\max(l,n), R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 均取为 m 次待定多项式。参数 k 按复数 $\lambda+\omega i$ 与特征根的关系确定:

$\lambda+\omega i$ 与特征根的关系	k
$\lambda+\omega i$ 不是特征根	0
$\lambda+\omega i$ 是特征根	1

对二阶实系数方程, 若 $\lambda+\omega i$ 是特征根, 则 $\lambda-\omega i$ 也同时是特征根。

经典例题讲解

1. 求二阶微分方程

$$y''+y'-2y=(x+1)\mathrm{e}^x$$

的通解。

2. 已知 $y_1=x^2,\ y_2=\mathrm{e}^{-2x}+x^2,\ y_3=\mathrm{e}^{3x}+x^2$ 是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的三个特解, 则该方程的通解可表示为 ________________。

例题变式

1. 设 $y'' - y = \mathrm{e}^x$, 写出待定特解的形式。

2. 求微分方程

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x + x$$

   的通解。