第七章微分方程专题复习 (教师版)

MatNoble

2026 年 6 月 2 日

目录

复习导引

本讲义围绕期末复习中第七章的六类高频考点展开：

1. 概念相关：阶、通解、任意常数、函数线性无关；
2. 可分离变量的微分方程；
3. 一阶线性微分方程；
4. 可降阶的微分方程；
5. 二阶常系数齐次线性微分方程；
6. 二阶常系数非齐次线性微分方程。

1 考点一:概念相关

知识点汇总

1. **阶:** 微分方程中出现的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶。

2. **通解:** n 阶微分方程的通解通常含有 n 个独立任意常数。

3. **特解:** 由初始条件或边界条件确定任意常数后得到的解。

4. **线性微分方程:** 关于未知函数 y 及其各阶导数 $y', y'', \cdots$ 均为一次,且它们之间不相乘、不复合非线性函数。

5. **齐次与非齐次:** 线性方程右端为 0 时称为齐次方程;右端不为 0 时称为非齐次方程。

6. **初值条件:** n 阶方程通常需要 n 个独立初值条件来确定一个特解。

7. **线性无关:** 若 $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n = 0$ 只在 $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ 时成立,则函数组线性无关。

经典例题讲解

1. 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 3x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2xy = x + 2$$

的通解含有 __2__ 个独立的任意常数。

【解】方程中最高阶导数为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$,所以是二阶微分方程。二阶微分方程的通解通常含有 2 个独立任意常数。

2. 微分方程

$$(y'')^5 + 6y^{(4)} - 5x(y')^3 + x^8 = 2$$

是 __4__ 阶微分方程。

【解】方程中出现的最高阶导数为 $y^{(4)}$,虽然 y'' 有五次方,但它仍是二阶导数。因此该方程为 4 阶微分方程。

例题变式

1. 方程 $y'' + xy' + \sin y = x$ 是不是线性微分方程?

   【解】 不是。因为含有 $\sin y$, 未知函数 y 被非线性函数作用, 所以是非线性微分方程。

2. 判断函数组 $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}$ 是否线性无关。

   【解】 线性无关。若 $C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} = 0$ 恒成立，两边除以 e^x 得 $C_1 + C_2\mathrm{e}^x = 0$ 恒成立，只能 $C_1 = C_2 = 0$。

2　考点二：可分离变量的微分方程

知识点汇总

1. 标准形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

2. 核心步骤：

$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

3. 注意常数解：分离变量时若除以含 y 的因子，需留意该因子为 0 时是否给出常数解。

经典例题讲解

1. 求微分方程

$$y'\tan x = y$$

的通解。

【解】由 $y'\tan x = y$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{\tan x} = y\cot x.$$

分离变量：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \cot x\ \mathrm{d}x.$$

两端积分：

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + C.$$

两边取指数，得

$$|y| = \mathrm{e}^{C}|\sin x|.$$

因为 $\mathrm{e}^{C} > 0$，再把绝对值带来的正负号并入任意常数，记为新的常数 C，于是

$$y = C\sin x.$$

故通解为

$$y = C\sin x.$$

例题变式

1. 求微分方程 $y' = 2xy$ 的通解。

【解】分离变量：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\ \mathrm{d}x.$$

积分得

$$\ln|y| = x^2 + C.$$

两边取指数：

$$|y| = \mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{x^2}.$$

将正负号并入任意常数，仍记为 C，故

$$y = C\mathrm{e}^{x^2}.$$

2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ 的通解。

【解】

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

两端积分得

$$\arctan y = \arctan x + C.$$

3 考点三:一阶线性微分方程

知识点汇总

1. 标准形式:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

2. 积分因子:

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

3. 齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

4. 通解公式:

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right].$$

5. 做题流程:先化为标准形式,再找 $p(x)$,算积分因子,最后代初值。

6. 若方程可整理为 $y' = f(x)y$,它既是一阶线性齐次方程,也可直接按可分离变量方程处理。

经典例题讲解

1. 求一阶微分方程

$$y' - 3x^2y = y, \qquad y(0) = 4$$

的特解。

【解】先化为标准形式:

$$y' - (3x^2 + 1)y = 0.$$

这是齐次的一阶线性方程,其中

$$p(x) = -(3x^2 + 1), \qquad q(x) = 0.$$

积分因子为

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int -(3x^2+1)\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-(x^3+x)}.$$

两边同乘积分因子:

$$\mathrm{e}^{-(x^3+x)}y' - (3x^2+1)\mathrm{e}^{-(x^3+x)}y = 0.$$

左边正好是乘积的导数:

$$\left[\mathrm{e}^{-(x^3+x)}y\right]' = 0.$$

因此

$$\mathrm{e}^{-(x^3+x)}y = C, \qquad y = C\mathrm{e}^{x^3+x}.$$

由 $y(0)=4$ 得 $C=4$, 故

$$y = 4\mathrm{e}^{x^3+x}.$$

本题也可直接分离变量:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = (3x^2+1)\,\mathrm{d}x,$$

积分后同样得到 $y = C\mathrm{e}^{x^3+x}$。

例题变式

1. 求微分方程 $y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x, y(0) = 0$ 的特解。

【解】 积分因子为

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x}.$$

两边同乘 e^x:

$$(\mathrm{e}^x y)' = \cos x.$$

积分得 $\mathrm{e}^x y = \sin x + C$。由 $y(0)=0$ 得 $C=0$, 故

$$y = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

4 考点四:可降阶的微分方程

知识点汇总

1. 若方程形如

$$y^{(n)} = f(x),$$

则连续积分 n 次。

2. 若方程不含 y, 即形如 $F(x, y', y'') = 0$, 令

$$p = y', \qquad y'' = p'.$$

此时把 p 看作 x 的函数。

3. 若方程不含 x, 即形如 $F(y, y', y'') = 0$, 令

$$p = y', \qquad y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

此时把 p 看作 y 的函数。

经典例题讲解

1. 微分方程

$$y''' = \mathrm{e}^{-x} + \sin x$$

的通解为 $\underline{\quad y = -\mathrm{e}^{-x} + \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \quad}$。

【解】 连续积分三次。第一次积分:

$$y'' = -\mathrm{e}^{-x} - \cos x + C_1.$$

第二次积分:

$$y' = \mathrm{e}^{-x} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

第三次积分:

$$y = -\mathrm{e}^{-x} + \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

因此

$$y=-\mathrm{e}^{-x}+\cos x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

例题变式

1. 求微分方程

$$xy''-y'=0\quad(x\neq 0)$$

的通解。

【解】 方程不含 y, 令

$$p=y',\qquad y''=p',$$

其中 p 看作 x 的函数。原方程化为

$$xp'-p=0,\qquad \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得 $p=C_1x$, 即

$$y'=C_1x.$$

再积分:

$$y=\frac{C_1}{2}x^2+C_2.$$

将常数重新记号, 通解为

$$y=C_1x^2+C_2.$$

2. 求微分方程

$$yy''=(y')^2$$

的通解。

【解】 方程不显含 x, 令

$$p=y',\qquad y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

其中 p 看作 y 的函数。原方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2.$$

当 $p \neq 0$ 时,两边约去 p:

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

积分得 $p = C_1 y$,即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y.$$

再分离变量并积分,得

$$y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}.$$

常数解 $y = 0$ 可包含在 $C_2 = 0$ 中。

5 考点五:二阶常系数齐次线性微分方程

知识点汇总

1. 标准形式:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

2. 特征方程:

$$r^2 + pr + q = 0.$$

3. 解题关键:先写特征方程,再按特征根类型写通解;初值题最后代入 $y(0), y'(0)$ 解常数。

4. 两个不等实根 r_1, r_2:

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}.$$

5. 二重实根 r:

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{rx}.$$

6. 共轭复根 $\alpha \pm \beta i$:

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

经典例题讲解

1. 通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x$$

的二阶常系数齐次线性微分方程为 $\underline{\quad y'' - 2y' + y = 0 \quad}$。

【解】 通解 $(C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x$ 对应特征方程有二重根 $r = 1$, 故

$$(r-1)^2 = 0, \qquad r^2 - 2r + 1 = 0.$$

因此对应微分方程为

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

2. 求微分方程

$$y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

的特解。

【解】 特征方程为

$$r^2 + r - 2 = 0, \qquad (r-1)(r+2) = 0.$$

故通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

由 $y(0) = 3$ 得 $C_1 + C_2 = 3$。又

$$y' = C_1 \mathrm{e}^x - 2C_2 \mathrm{e}^{-2x},$$

由 $y'(0) = 0$ 得 $C_1 - 2C_2 = 0$。解得 $C_1 = 2, C_2 = 1$, 故

$$y = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x}.$$

例题变式

1. 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解。

【解】特征方程

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0.$$

故

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x}.$$

6 考点六:二阶常系数非齐次线性微分方程

知识点汇总

1. 非齐次线性方程通解结构:
$$y = y_h + y_p,$$
其中 y_h 是对应齐次方程通解, y_p 是非齐次方程的一个特解。

2. 若已知同一个非齐次线性方程的两个特解 y_1, y_2, 则 $y_1 - y_2$ 是对应齐次方程的解。

3. 若右端可分解为 $f_1(x) + f_2(x)$, 可分别求两个特解 y_{p1}, y_{p2}, 再取
$$y_p = y_{p1} + y_{p2}.$$

4. 对常见右端
$$f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$
其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式, 特解通常设为
$$y_p = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$
其中 $Q_m(x)$ 取为 m 次待定多项式。参数 k 按 λ 与特征根的关系确定:

λ 与特征根的关系	k	修正因子
λ 不是特征根	0	1
λ 是单特征根	1	x
λ 是二重特征根	2	x^2

例如右端为 $(x+1)\mathrm{e}^x$ 时, $m = 1$, 所以 $Q_m(x) = Ax + B$。

5. 对常见右端
$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right],$$
特解通常设为
$$y_p = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right],$$

其中 $m=\max(l,n)$, $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 均取为 m 次待定多项式。参数 k 按复数 $\lambda+\omega i$ 与特征根的关系确定:

$\lambda+\omega i$ 与特征根的关系	k
$\lambda+\omega i$ 不是特征根	0
$\lambda+\omega i$ 是特征根	1

对二阶实系数方程, 若 $\lambda+\omega i$ 是特征根, 则 $\lambda-\omega i$ 也同时是特征根。

经典例题讲解

1. 求二阶微分方程

$$y''+y'-2y=(x+1)\mathrm{e}^x$$

的通解。

【解】先求齐次方程

$$y''+y'-2y=0.$$

特征方程 $r^2+r-2=0$, 根为 $r=1,-2$, 故

$$y_h=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

由于右端为 $(x+1)\mathrm{e}^x$, 且 $\lambda=1$ 是特征方程的单根, 因此设

$$y_p=x(Ax+B)\mathrm{e}^x=(Ax^2+Bx)\mathrm{e}^x.$$

为了减少计算量, 记

$$y_p=\mathrm{e}^x u(x), \qquad u=Ax^2+Bx.$$

则

$$y_p'=\mathrm{e}^x(u+u'), \qquad y_p''=\mathrm{e}^x(u+2u'+u'').$$

代入左端:

$$y_p''+y_p'-2y_p=\mathrm{e}^x(u''+3u').$$

又

$$u'=2Ax+B, \qquad u''=2A,$$

所以

$$u'' + 3u' = 6Ax + 2A + 3B.$$

与右端 $(x+1)\mathrm{e}^x$ 比较, 得

$$6Ax + 2A + 3B = x + 1.$$

比较系数:

$$6A = 1, \qquad 2A + 3B = 1.$$

故

$$A = \frac{1}{6}, \qquad B = \frac{2}{9}.$$

所以通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9}\right)\mathrm{e}^x.$$

2. 已知 $y_1 = x^2$, $y_2 = \mathrm{e}^{-2x} + x^2$, $y_3 = \mathrm{e}^{3x} + x^2$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的三个特解, 则该方程的通解可表示为 $\underline{\quad y = x^2 + C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{3x} \quad}$。

【解】 非齐次方程的任意两个特解之差是对应齐次方程的解:

$$y_2 - y_1 = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad y_3 - y_1 = \mathrm{e}^{3x}.$$

于是齐次通解为

$$C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

取 $y_1 = x^2$ 为一个特解, 故原方程通解为

$$y = x^2 + C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

例题变式

1. 设 $y'' - y = \mathrm{e}^x$, 写出待定特解的形式。

【解】特征方程 $r^2 - 1 = 0$, 根为 $r = \pm 1$。右端 e^x 对应 $\lambda = 1$, 是单根, 因此特解应设为

$$y_p = Ax\mathrm{e}^x.$$

2. 求微分方程

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x + x$$

的通解。

【解】对应齐次方程的特征方程为

$$(r-1)^2 = 0,$$

故

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x.$$

右端分成 e^x 与 x 两部分。由于 $\lambda = 1$ 是二重特征根, 设

$$y_{p1} = Ax^2\mathrm{e}^x.$$

代入得 $2A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, 所以 $A = \frac{1}{2}$。对右端 x, 设

$$y_{p2} = ax + b.$$

代入得

$$ax + b - 2a = x,$$

所以 $a = 1, b = 2$。因此通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x + x + 2.$$