厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

# 8-1 向量代数

## 第八章 空间解析几何与向量代数

信息科学与技术学院

## 定义与表示

- **向量**：即具有大小和方向的量。
- **表示法**：
  - 几何表示：有向线段 $\vec{AB}$ 或 $\boldsymbol{a}$。
  - 模：向量的大小，记作 $|\boldsymbol{a}|$。
- **特殊向量**：
  - **单位向量**：模为 1 的向量，记作 $\boldsymbol{a}^0$。
  - **零向量**：模为 0 的向量，方向任意，记作 $\mathbf{0}$。
  - **等价向量**：模相等且方向相同的两个向量。

# 2. 向量的线性运算



## 加法运算

- **法则**：三角形法则或平行四边形法则。
- **性质**：交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

## 减法运算

- $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。

## 数与向量的乘积

- 定义：实数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍为向量（模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，方向由 $\lambda$ 符号决定）。
- 性质：满足分配律与结合律。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

## 坐标系的建立

- 通过空间定点 $O$ 引三条两两垂直的数轴：$x$ 轴（横轴）、$y$ 轴（纵轴）、$z$ 轴（竖轴）。
- 遵循**右手规则**。

## 空间区域划分

- 三个坐标平面 $Oxy, Oyz, Ozx$ 将空间划分为八个区域，称为**卦限**。
- 点 $M$ 的位置由三元组 $(x, y, z)$ 唯一确定。

## 点与向量的对应

- 设点 $M(x, y, z)$，从原点 $O$ 到点 $M$ 的有向线段称为点 $M$ 的**径矢**（向径）。
- 在空间直角坐标系中，点 $M$ 的坐标 $(x, y, z)$ 与其径矢 $\boldsymbol{r} = \vec{OM}$ 的分量一一对应。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

## 坐标分解式

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为沿 $x,y,z$ 轴正方向的单位向量。任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可唯一分解为：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

其中 $\{a_x,a_y,a_z\}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的**分量**，记作 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$。

## 线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$：

- $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$
- $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

## 模与方向余弦

- 模的计算：

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- 方向角：向量与各坐标轴正方向的夹角 $\alpha, \beta, \gamma$。
- 方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

- 重要恒等式：$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$。

# 例题：坐标表示与方向角



**例 1**：已知两点 $A(2,1,0)$，$B(3,2,\sqrt{2})$，计算向量 $\vec{AB}$ 的模、方向余弦和方向角。

解：

1. 求向量坐标：

$$\vec{AB} = (3-2, 2-1, \sqrt{2}-0) = (1, 1, \sqrt{2})$$

2. 计算模：

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

3. 计算方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. 求方向角：

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 45^\circ$$

时练习 即

练习：设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$。求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 $x$ 轴上的投影及在 $y$ 轴上的分向量。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

**解析简述：**

1. 计算 $\boldsymbol{a}$ 的坐标：

$$a_x = 4(3) + 3(2) - 5 = 13$$
$$a_y = 4(5) + 3(-4) - 1 = 7$$
$$a_z = 4(8) + 3(-7) - (-4) = 15$$

2. $x$ 轴投影：$Prj_x\boldsymbol{a} = 13$。
3. $y$ 轴分向量：$7\boldsymbol{j}$ 或 $(0, 7, 0)$。

**例 2**：已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,2)$，求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角平分线上的单位向量 $\boldsymbol{e}$。

# 进阶例题：角平分线单位向量 (解)

解：

1. 单位化：

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{(3,4,0)}{5} = (0.6, 0.8, 0)；\ \boldsymbol{e}_b = \frac{(1,2,2)}{3} = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})。$$

2. 合成方向向量：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_b = (\tfrac{14}{15}, \tfrac{22}{15}, \tfrac{10}{15}) = \tfrac{2}{15}(7, 11, 5)。$$

3. 求单位向量：

$$|\boldsymbol{v}| = \frac{2\sqrt{195}}{15} \implies \boldsymbol{e} = \frac{(7,11,5)}{\sqrt{195}} = (\frac{7}{\sqrt{195}}, \frac{11}{\sqrt{195}}, \frac{5}{\sqrt{195}})。$$

# 本节小结



1. **基本概念**：向量、模、单位向量、零向量。
2. **运算规则**：线性运算的几何意义与代数（坐标）表达。
3. **空间坐标**：右手系、卦限、径矢。
4. **解析表示**：分量表示、模公式、方向余弦。

# 课表进度任务

- **习题**：作业集：向量代数
- **预习**：数量积与向量积
- **知识拓展**：点和向量与坐标的统一。