厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

8-2 数量积与向量积

第八章 空间解析几何与向量代数

信息科学与技术学院

定义

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量，它们的夹角为 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$。称实数

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

为两向量的**数量积**。

几何意义

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上投影的乘积：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

运算性质

- 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
- 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
- 垂直判定：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

投影公式

向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影** $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是一个标量：

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

> **注意：**
>
> 1. $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} > 0 \implies$ 投影方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；
> 2. $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} < 0 \implies$ 投影方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反。

坐标形式

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

应用

- 模的平方：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2 \implies |\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$。
- 夹角余弦：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

例题：数量积与夹角

例 1：已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$，求：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ。

解：

1. 计算数量积：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1(1) + 1(-2) + (-4)(2) = 1 - 2 - 8 = -9$$

2. 计算模：

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

3. 求夹角余弦：

$$\cos\theta = \frac{-9}{(3\sqrt{2})(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta = \frac{3\pi}{4}\ (135^\circ)$$

定义

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积** $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 是一个向量：

1. **模**： $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$。
   - 其几何意义为以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。
2. **方向**： 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{b}$，指向按**右手规则**确定。
   - 右手四指由 $\boldsymbol{a}$ 经小于 π 的角转向 $\boldsymbol{b}$，大拇指指向即为 $\boldsymbol{c}$ 的方向。

- **平行判定**： $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$。

运算性质

- 反交换律：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。
- 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$。
- 数乘：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

基向量的运算

- $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$。
- $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$。

行列式形式

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}$$

计算建议：采用代数余子式按第一行展开法进行计算，保证符号准确。

> **练习**：已知向量 $\vec{OA} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$，$\vec{OB} = \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$，求 $\triangle OAB$ 的面积。

解析：

1. 求向量积 $\vec{OA} \times \vec{OB}$:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3)\boldsymbol{i} - (3)\boldsymbol{j} + (1)\boldsymbol{k} = (-3, -3, 1)$$

2. 计算平行四边形面积（模）：

$$S = |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}$$

3. 三角形面积：

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{19}$$

题：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=3$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$。

提示：

对 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$ 展开。

$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$$

$$9+9+9+2\Sigma=0 \implies \Sigma=-13.5$$

定义

称数量 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，记作 $[\boldsymbol{abc}]$。

几何意义

混合积的绝对值等以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的**平行六面体的体积** V。

坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$:

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 2：已知四面体 $ABCD$ 的顶点为 $A(0,0,0), B(3,4,-1), C(2,3,5), D(6,0,-3)$，求其体积。

解：

1. **构造向量**：$\boldsymbol{AB}=(3,4,-1),\boldsymbol{AC}=(2,3,5),\boldsymbol{AD}=(6,0,-3)$。
2. **计算混合积**：

$$[\boldsymbol{ABACAD}]=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\2 & 3 & 5\\6 & 0 & -3\end{vmatrix}=6(20+3)-0-3(9-8)=135$$

3. **求体积**：四面体体积为六面体的 $1/6$。

$$V=\frac{1}{6}|135|=22.5$$

重点回顾

- **数量积**：结果为数量。常用于求夹角、投影、判定垂直。
- **向量积**：结果为向量。常用于求面积、判定平行、构造法向量。

知识拓展：物理意义

- **功 (Work)**：恒力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ 方向上做的功为 $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$。
- **力矩 (Moment)**：力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的力矩为 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$（其中 $\boldsymbol{r}$ 为作用点位置向量）。

课表进度任务

- **习题**：作业集：数量积、向量积、混合积
- **预习**：空间曲面及其方程
- **注意**：务必掌握两向量向量积的方向判定，避免分量计算符号错误。