



廈門大學嘉庚學院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

## 8-3 空间曲面及其方程

# 第八章 空间解析几何与向量代数

信息科学与技术学院

# 1. 曲面方程的概念

## I 定义

如果曲面  $S$  与三元方程  $F(x, y, z) = 0$  有如下关系：

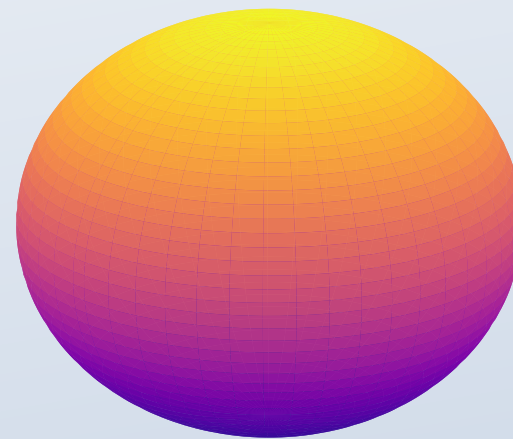
1. 曲面  $S$  上任意一点的坐标都满足方程；
2. 凡是满足方程的坐标所对应的点都在曲面  $S$  上。

则称方程  $F(x, y, z) = 0$  为曲面  $S$  的方程。

## I 示例：球面

空间中到定点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的距离等于定长  $R$  的点的轨迹：

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$



### I 定义

一条平面曲线  $C$  绕其平面内的一条定直线（轴）旋转一周所成的曲面。

### I 建立规律 (重点)

设  $f(y, z) = 0$  是  $yz$  面上的一条曲线：

- 绕  $z$  轴旋转：保持  $z$  不变，将  $y$  替换为  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 。

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

- 绕  $y$  轴旋转：保持  $y$  不变，将  $z$  替换为  $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ 。

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

“

口诀：绕哪轴转哪轴不动，另一变量换成到轴距离。

## 2. 旋转曲面示例

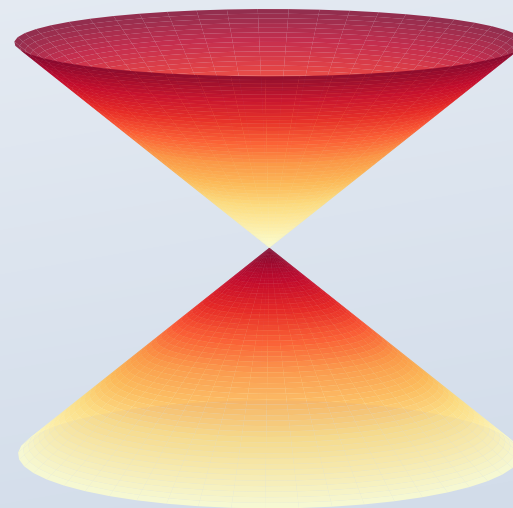
### 例 1

将  $yz$  面上的直线  $z = ky$  ( $y \geq 0$ ) 绕  $z$  轴旋转。

解：将  $y$  替换为  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ：

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2} \implies z^2 = k^2(x^2 + y^2)$$

得到的是一个圆锥面。



### I 定义

平行于定直线（母线）并沿定曲线  $C$ （准线）移动的直线  $L$  所形成的曲面。

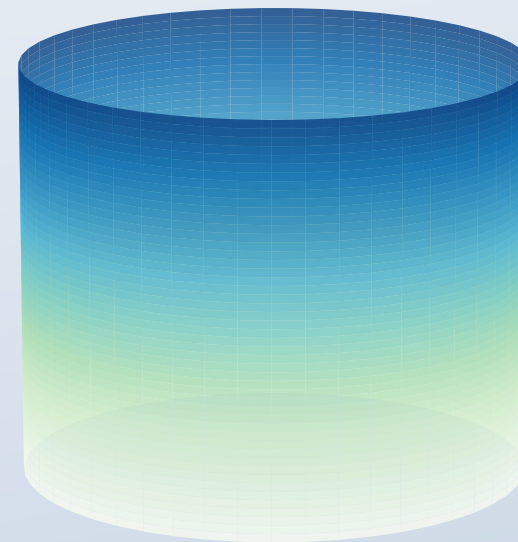
### I 特征

在空间坐标系下，只含两个变量的方程

$f(x, y) = 0$  表示以  $xy$  面上的曲线

$f(x, y) = 0$  为准线，母线平行于  $z$  轴的柱面。

- $x^2 + y^2 = R^2$ : 圆柱面
- $y = x^2$ : 抛物柱面
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ : 双曲柱面



### I 定义

通过定点  $O$  (顶点) 且沿定曲线  $C$  (准线) 移动的直线 (母线) 所形成的曲面。

### I 二次锥面方程

顶点在原点, 准线在  $z = h$  面上的圆, 方程形式为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

特征:

方程  $F(x, y, z) = 0$  如果是关于  $x, y, z$  的齐次方程 (即满足  $F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$ ), 则它通常表示顶点在原点的一个锥面。

## 5. 二次曲面 (1) 椭球面

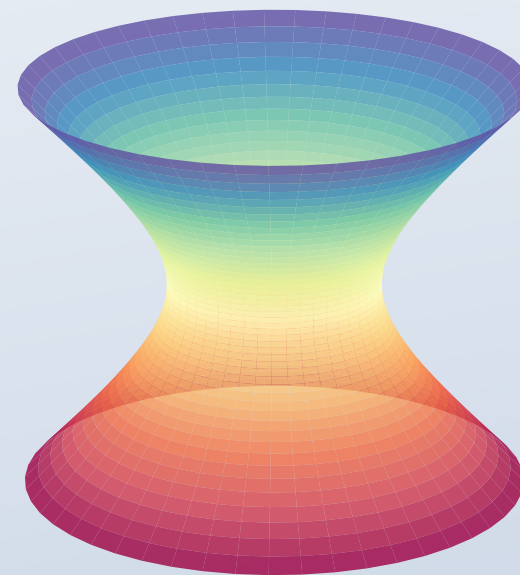
### ■ 椭球面方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- 当  $a = b = c$  时为球面。
- 截痕法：用坐标面或平行于坐标面的平面去截曲面，所得截痕均为椭圆。

### ■ 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



### ■ 双叶双曲面方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{或} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

特征：

- 曲面由两片组成。
- 只有当  $|z| \geq c$  时曲面才存在。
- 截痕法：用  $|z| = h > c$  的平面截，截痕为椭圆。

## 5. 二次曲面：单/双叶双曲面辨析

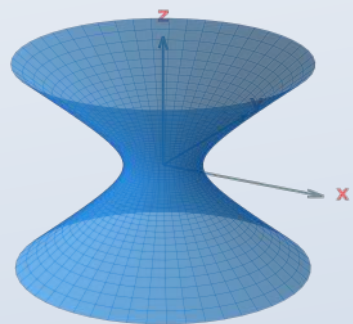
### 判定口诀：右边化1，左面数负号

将方程化为右侧为 +1 的标准型，统计左侧二次项中负号的数量：

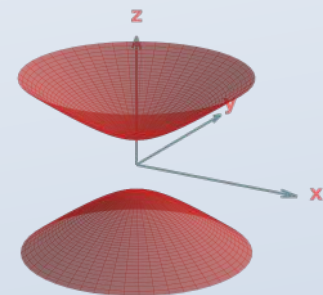
- 1个负号  $\implies$  单叶（连通的一片）
- 2个负号  $\implies$  双叶（不连通的两片）

绘图说明：上图采用国内教材常用的坐标系视角（ $z$  轴向上， $x$  轴左下， $y$  轴右下）。

Single-sheet (One negative sign)  
 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$



Double-sheet (Two negative signs)  
 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$



### ■ 椭圆抛物面

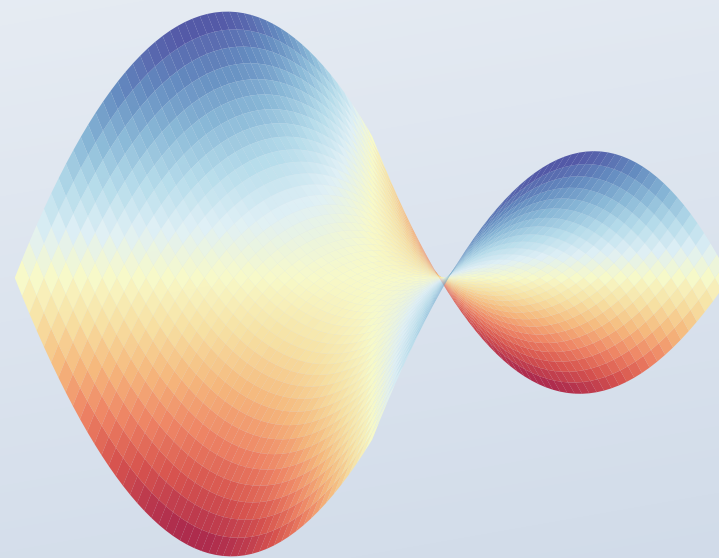
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (p, q > 0)$$

形状类似“碗”。

### ■ 双曲抛物面 (马鞍面)

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

在原点附近形如马鞍。



## 重点回顾

- 旋转曲面：掌握代换规律  $y \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ 。
- 柱面：识别缺省变量（如  $f(x, y) = 0$  缺  $z$  表母线平行于  $z$  轴）。
- 二次曲面：熟悉椭球面、双曲面、抛物面的标准方程。

## 知识拓展：旋转曲面的特征

- 观察方程：如果  $x, y$  总是通过  $x^2 + y^2$  的形式出现，说明曲面绕  $z$  轴对称。
- 应用：卫星天线（抛物面）、冷却塔（单叶双曲面）。

## 课表进度任务

- 习题：作业集：空间曲面及其方程
- 预习：空间曲线及其方程
- 要求：能根据方程准确判断曲面类型，特别是柱面和旋转曲面的识别。