厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

8-4 空间曲线及其方程

第八章 空间解析几何与向量代数

信息科学与技术学院

引入：交线的视角

空间曲线可以看作是两个曲面 S_1 和 S_2 的**交线**。

定义

设曲面 S_1 和 S_2 的方程分别为 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$，则它们的交线 C 的方程组称为曲线 C 的**一般方程**：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

关键理解

- 方程组中的每一个方程代表一个曲面。
- 只有同时满足两个方程的点坐标，才在交线 C 上。

1. 即时练习：一般方程

即时练习

试指出广义方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=1 \end{cases}$ 表示什么几何图形?

解析

几何意义：

- 第一个方程 $x^2+y^2+z^2=9$ 表示中心在原点、半径为 3 的**球面**。
- 第二个方程 $z=1$ 表示平行于 xy 面且高度为 1 的**平面**。

结论：

该方程组表示球面与平面的交线，即一个在平面 $z=1$ 上的**圆**，其中心为 $(0,0,1)$，半径为 $\sqrt{9-1^2}=\sqrt{8}$。

2. 空间曲线的参数方程

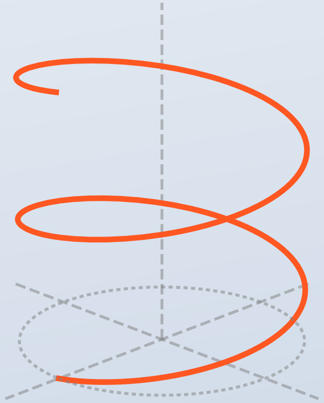
引入：运动的视角

将曲线看作空间动点 $M(x, y, z)$ 随时间 t 连续移动而产生的**轨迹**。

定义

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (t_1 \le t \le t_2) \\ z = z(t) \end{cases}$$

其中 t 称为**参数**。



经典案例：螺旋线 (Helix)

动点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以匀速绕 z 轴旋转，同时以匀速沿 z 轴上升。

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

即时练习

> 设一个圆在 xy 面上，中心在原点，半径为 R。试写出该圆在空间中的参数方程。

解析

解：

1. 在 xy 面上，圆的普通参数方程为 $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$。
2. 因为圆在 xy 面上，所以其 z 坐标恒等于 0。

空间参数方程：

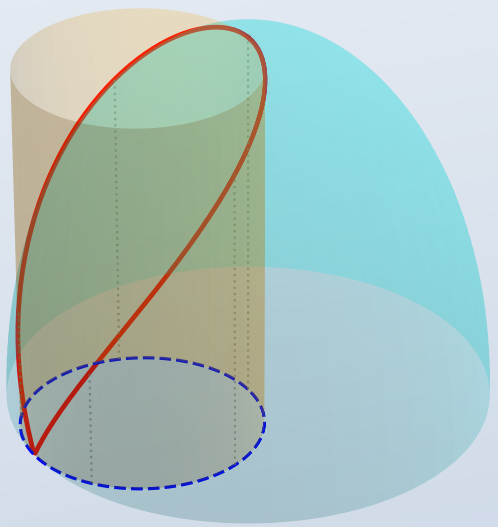
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \\ z = 0 \end{cases}$$

核心逻辑：消元与投影

1. **消元**：从方程组中消去 z，得只含 x, y 的方程 $H(x, y) = 0$。
2. **几何意义**：$H(x, y) = 0$ 代表以 C 为准线的**投射柱面**。
3. **投影方程**：柱面与 xy 面相交，即得投影曲线。

投影曲线方程组

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



即时练习

> 求空间曲线 $C:\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 4 - x^2 \end{cases}$ 在 xy 面上的投影曲线。

解析

第一步：消去 z

由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 4 - x^2 \end{cases}$ 得：

$x^2 + 2y^2 = 4 - x^2$

$2x^2 + 2y^2 = 4 \implies x^2 + y^2 = 2$

第二步：写出投影曲线方程

在 xy 面上，$z = 0$，故投影曲线方程为：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

结论：投影曲线是 xy 面上中心在原点，半径为 $\sqrt{2}$ 的一个圆。

练习 1：椎面与柱面 (题目)

求 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$ 在 Oxy 面上的投影。

练习 1：解析

1. 联立消去 z: $(\sqrt{x^2+y^2})^2 = 2x \implies x^2+y^2=2x$
2. 配方：$(x-1)^2+y^2=1$
3. **结论**：投影为 xy 面上圆心在 $(1,0)$，半径为 1 的圆。

练习 2：球面与椎面 (题目)

求 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 在 Oxy 面上的投影。

练习 2：解析

- 消元得 $3x^2 + 3y^2 = 4 - x^2 - y^2$
- 整理得 $4(x^2 + y^2) = 4 \implies x^2 + y^2 = 1$。
- **结论**：投影为单位圆。

练习 3： 旋转抛物面的投影

求 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$ 在三个坐标面上的投影。

练习 3：解析

- Oxy **面**：由 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 知，投影为半径为 2 的**圆面**。
- Oyz **面**：消去 x 后边界为 $z = y^2$。投影为由 $z = y^2$ 与 $z = 4$ 围成的**抛物线区域**。
- Oxz **面**：同理，投影为由 $z = x^2$ 与 $z = 4$ 围成的抛物线区域。

> **提示**：三面投影能帮助我们全方位建立立体的轮廓感。

重点回顾

- **一般方程**：理解为面面相交 $\begin{cases} F=0 \\ G=0 \end{cases}$。
- **参数方程**：轨迹视角，掌握螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$。
- **投影曲线**：消元得到投射柱面，补上坐标面方程 (如 $z=0$)。

知识拓展：投影区域

在计算多元函数积分时，确定空间曲线投影出的平面闭区域 D 是至关重要的第一步。

- **投射柱面**：$H(x,y)=0$
- **投影区域**：由 $H(x,y)=0$ 所围成的平面部分。

课表进度任务

- **练习**：作业集：空间曲线及其方程
- **预习**：平面及其方程
- **要求**：掌握消元法求投影，能描述常见空间曲线（圆、直线、螺旋线）的方程。