厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

8-5 平面及其方程

第八章 空间解析几何与向量代数

本节知识图谱

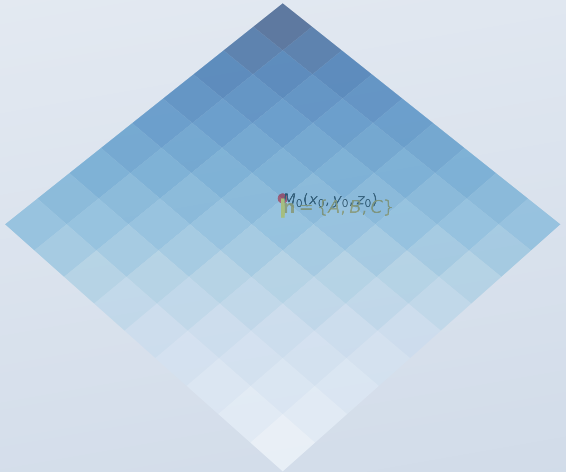
1. 平面的点法式方程

POINT-NORMAL FORM

1. 平面的点法式方程 (Point-Normal Form)

引入：如何唯一确定一个平面?

- **几何条件**：已知平面内的一个点 M_0 和一个垂直于该平面的非零向量 $\mathbf{n}$。
- **定义**：垂直于平面的非零向量 $\mathbf{n}$ 称为该平面的**法向量** (Normal Vector)。



方程推导

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面上定点，$\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ 为法向。

对于平面上任意点 $M(x, y, z)$，必有 $\overrightarrow{M_0 M} \perp \mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

即时练习 1 (镜像考点)

> **题目**：设一平面过点 $P_0(3,-2,1)$，且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(0,1,2)$，求该平面的方程。

解析：第一步

找法向量：由于平面平行于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则法向量必须同时垂直于这两个向量。

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{n} = (4+1)\mathbf{i} - (2-0)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = \{5, -2, 1\}$$

解析：第二步

利用点法式写方程：

由点 $P_0(3,-2,1)$ 及法向 $\mathbf{n}=\{5,-2,1\}$：

$$5(x-3)-2(y+2)+1(z-1)=0$$

整理得一般方程：

$$5x-2y+z-20=0$$

即时练习 2 (镜像考点)

> **题目**：求通过不在同一直线上的三点 $A(1,0,1), B(2,1,0), C(0,1,2)$ 的平面方程。

解析：

1. 构造向量：
   - $\vec{AB} = \{1, 1, -1\}$
   - $\vec{AC} = \{-1, 1, 1\}$
2. 求法向：

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \{2, 0, 2\} \implies \text{取 } \mathbf{n}' = \{1, 0, 1\}$$

3. 点法式方程：

$$1(x-1) + 0(y-0) + 1(z-1) = 0 \implies x + z - 2 = 0$$

2. 平面的一般方程

GENERAL FORM

定义与推导

1. 引自点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
2. 展开整理：$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$
3. 一般方程：令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，即：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

> **结论**：三元一次方程的系数 (A,B,C) 即为平面的一个法向量。

系数对位置的影响

基于方程 $Ax + By + Cz + D = 0$:

- $D = 0$: 平面过原点。
- **缺项即平行**:
  - 若 $A = 0$, 平面平行于 x 轴 (x 项消失);
  - 若 $A = B = 0$, 平面平行于 xOy 面 (x, y 项均消失)。

2. 截距式方程 (Intercept Form)

截距式定义

若平面在坐标轴上的截距分别为 $a, b, c\ (a, b, c \neq 0)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

> **提示**: 截距式在计算平面与坐标轴围成的体积时非常方便。

3. 两平面的夹角

ANGLE BETWEEN PLANES

几何定义

两平面的夹角 θ 与其法向量夹角 α 的关系：

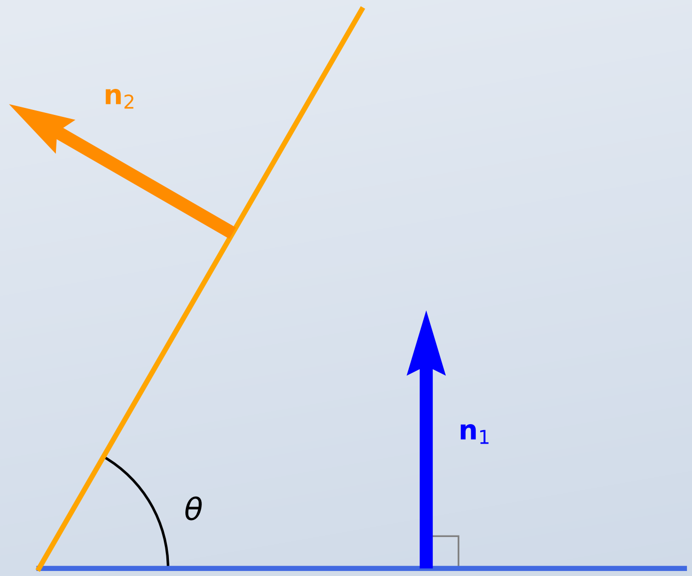
- 在交线的法剖面内观察：$\alpha = \theta$ 或 $\alpha = \pi - \theta$ (互补)。
- **定义**：通常取其中的**锐角**或**直角**作为两平面的夹角。

计算公式 (余弦形式)

$$\cos\theta = |\cos\alpha| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

> **几何解析**：由于 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$，公式中添加**绝对值**是为了消除法向量指向随机性导致的符号差异，确保结果对应锐角定义。

两平面夹角几何原理 (沿交线投影视图)



特殊位置关系判定

基于法向量 $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ 与 $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$:

- **垂直**: $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

- **平行**: $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

即时练习 3 (镜像考点)

> **题目**：求过点 $M(1,1,1)$ 且垂直于两平面 $\Pi_1: x+z-1=0$ 与 $\Pi_2: y+z-2=0$ 的平面方程。

解析：

1. **分析条件**：所求平面法向 $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1$ 且 $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_2$。
2. **计算法向**：$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$

$$\mathbf{n} = \{1, 0, 1\} \times \{0, 1, 1\} = \{-1, -1, 1\}$$

3. **方程结果**：利用点 $M(1, 1, 1)$

$$-(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0 \implies x + y - z - 1 = 0$$

即时练习 4 (镜像考点)

> **题目**：求平面 $\Pi_1 : x + y - 2z - 1 = 0$ 与 $\Pi_2 : x - 2y + z + 3 = 0$ 的夹角。

解析：

1. 法向量分量：$\mathbf{n}_1 = \{1, 1, -2\}$，$\mathbf{n}_2 = \{1, -2, 1\}$。
2. 余弦计算：

$$\cos\theta = \frac{|1-2-2|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. 最终夹角：

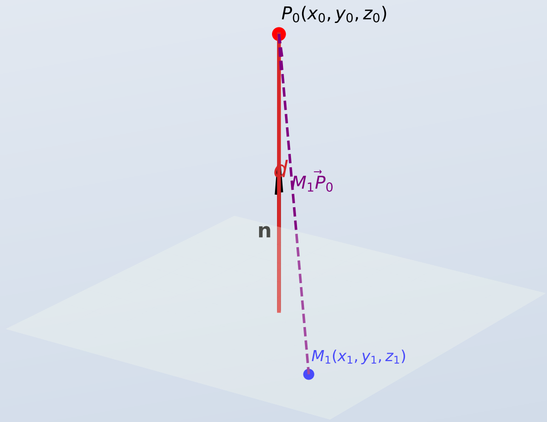
$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}(60^\circ)$$

4. 点到平面的距离

DISTANCE

问题背景与定义 (Setting & Definition)

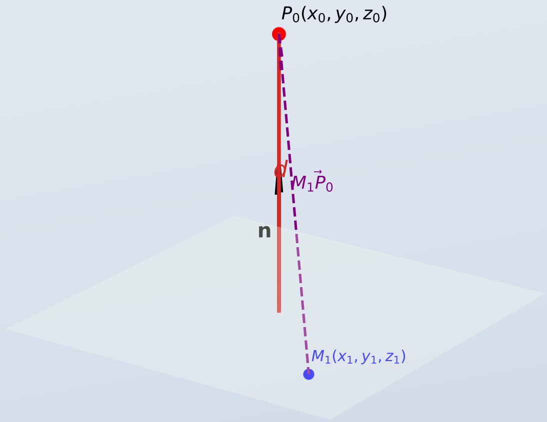
- **已知条件**：
  - **定点**： $P_0(x_0, y_0, z_0)$。
  - **平面** Π： $Ax + By + Cz + D = 0$ (法向量 $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$)。
- **任务目标**： 求点 P_0 到平面 Π 的垂直距离 d。
- **几何定义**： d 是点 P_0 到其在平面内垂点 H 的线段长度。



几何原理：向量投影法

1. **辅助点**：在平面内任取参考点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$。
2. **向量化**：构造连接面内外的向量 $\vec{M_1P_0}$。
3. **投影解析**：距离 d 即为 $\vec{M_1P_0}$ 在法向 $\mathbf{n}$ 上的投影绝对值：

$$d = |\mathrm{Prj}_{\mathbf{n}}\vec{M_1P_0}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \vec{M_1P_0}|}{|\mathbf{n}|}$$



4. 点到平面的距离 (3/3): 代数推导与公式

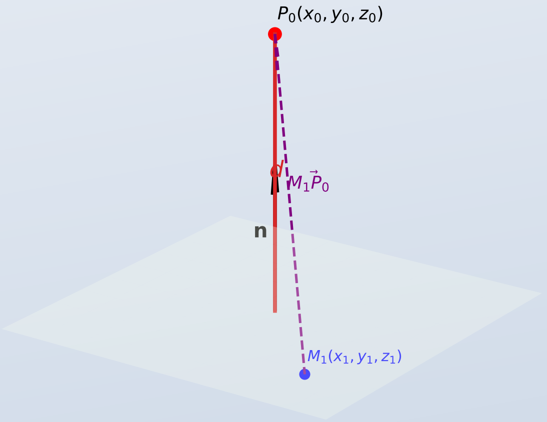
代数推导与结果

1. **公式展开：**

$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. **化简：** 分子为 $|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|$。
3. **最终公式：** 因 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$，故：

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



即时练习 5 (镜像考点)

> **题目**：求原点 $(0,0,0)$ 到平面 $3x-4y+12z-13=0$ 的距离。

解析：

1. 代入公式：

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \cdot 0 - 13|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}}$$

2. 计算结果：

$$d = \frac{|-13|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{13}{13} = 1$$

知识小结

- **点法式**是核心：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。
- **确定法向**是关键：常利用向量外积（垂直关系）。
- **判定关系**：平行（系数成正比）、垂直（点积为 0）。
- **距离公式**：点 P_0 到面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

课后研讨与任务

- **同步练习**：作业集 8-5 节。
- **黑板绘图**：建议先画出法向量 $\mathbf{n}$，再由垂直关系绘制主平面。
- **多维思考**：观察 D 值改变时，平面在空间产生的平移效果。