厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

8-6 空间直线及其方程

第八章 空间解析几何与向量代数

本节导引 (Table of Contents)

本节知识图谱

1. **空间直线的点向式方程 (Point-Direction Form)** — 空间解析的基础表达。
2. **参数方程与一般方程** — 从交线到点向式的降阶转化。
3. **两直线的夹角 (Angle Between Lines)** — 方向矢量的夹角分析。
4. **直线与平面的夹角 (Line-Plane Angle)** — 直线与法线的互余修正公式。
5. **点到直线的距离 (Point-to-Line Distance)** — 平行四边形法 (外积模长)。
6. **空间直线的综合演练** — 涉及线、面、点的复合几何问题。

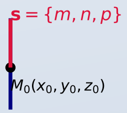
1. 空间直线的点向式方程

POINT-DIRECTION FORM

1. 空间直线的点向式方程 (Point-Direction Form)

引入：如何唯一确定一条直线?

- **几何条件**：已知直线上的一点 M_0 和一个与之平行的非零向量 $\mathbf{s}$。
- **定义**：平行于直线的非零向量 $\mathbf{s}$ 称为该直线的**方向向量** (Direction Vector)。



方程推导

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上定点，$\mathbf{s} = \{m, n, p\}$ 为方向向量。
对于直线上任意点 $M(x, y, z)$，必有 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \mathbf{s}$ 分量成正比：

对称式方程 (Symmetric Form)：

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

> **注意**：若分母中 m, n, p 某项为 0，对应的分子也需定义为 0（如 $m = 0 \implies x = x_0$）。

2. 参数方程与一般方程

PARAMETRIC & GENERAL FORMS

参数方程 (Parametric Form)

将对称式设为参数 t，可解出直线的坐标表示：

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

空间直线的一般方程 (General Form)

直线也可视为两个不平行平面的**交线**：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

> **提示**：在研究直线与平面的交点、直线间的相对位置时，参数方程往往比对称式更高效。

即时练习 1 (镜像考点)

> **题目**：求过点 $M(1,0,-2)$ 且垂直于平面 $2x-y+z-6=0$ 的直线方程。

解析：

1. **分析逻辑**：直线垂直于平面 $\Longrightarrow$ 直线的方向向量 $\mathbf{s} \parallel$ 平面的法图向量 $\mathbf{n}$。
2. **提取分量**：平面法向 $\mathbf{n} = \{2, -1, 1\}$，故令 $\mathbf{s} = \{2, -1, 1\}$。
3. **方程结果**：

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

即时练习 2 (镜像考点)

> **题目**：求通过原点 $(0,0,0)$ 且平行于两平面 $\Pi_1 : x-y+z-1=0$ 与 $\Pi_2 : 2x+y-z+3=0$ 的直线。

解析：

1. 分析逻辑：直线平行于两个平面 $\Longrightarrow$ 直线垂直于两个平面的法向量。
2. 计算方向向量：$\mathbf{n}_1=\{1,-1,1\},\mathbf{n}_2=\{2,1,-1\}$。

$$\mathbf{s}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\{0,3,3\}\Longrightarrow \text{取 } \mathbf{s}'=\{0,1,1\}$$

3. 方程结果：

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

3. 两直线的夹角

ANGLE BETWEEN LINES

核心公式

两直线的夹角 φ 定义为它们方向向量 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 之间的锐角或直角：

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}$$

判定条件

- **垂直**：$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$
- **平行/重合**：$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2$

即时练习 3 (镜像习题 2)

> 题目：求 $L_1:\{x=1+t,y=t,z=1-t\}$ 与 $L_2:\{x=2-t,y=1+t,z=t\}$ 的夹角。

解析：

1. 分量提取：$\mathbf{s}_1 = \{1, 1, -1\}$，$\mathbf{s}_2 = \{-1, 1, 1\}$。
2. 计算余弦：

$$\cos\varphi = \frac{|(1)(-1) + (1)(1) + (-1)(1)|}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

3. 最终夹角：

$$\varphi = \arccos(1/3)$$

4. 直线与平面的夹角

LINE-PLANE ANGLE

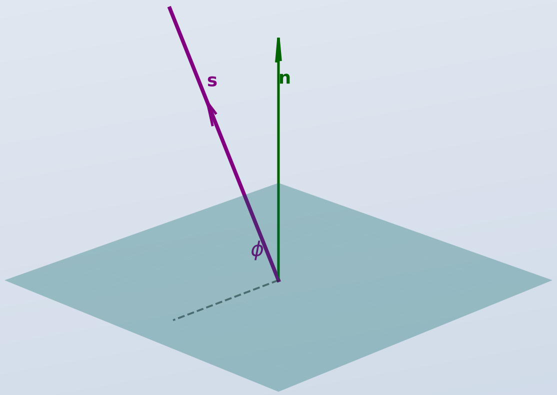
4. 直线与平面的夹角 (Line-Plane Angle)

定义与公式

直线 L (方向 $\mathbf{s}$) 与平面 Π (法向 $\mathbf{n}$) 的夹角设为 ϕ
：

$$\sin\phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}$$

> **注意**：法向量与方向向量的夹角与线面角是**互余**关系，故计算使用 sin 代替 cos。



即时练习 4 (镜像考点)

> 题目：求直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{\sqrt{2}}$ 与平面 $x+y+\sqrt{2}z=5$ 的夹角。

解析：

1. 分量提取：$\mathbf{s}=\{1,1,\sqrt{2}\}$，$\mathbf{n}=\{1,1,\sqrt{2}\}$。
2. 计算正弦：

$$\sin\phi=\frac{|1+1+2|}{\sqrt{1+1+2}\sqrt{1+1+2}}=\frac{4}{4}=1$$

3. 最终夹角：

$$\phi=\frac{\pi}{2}(90^\circ)\implies \text{线面垂直}$$

5. 点到直线的距离

DISTANCE

5. 点到直线的距离 (Distance)

问题建模 (Problem Setting)

- **已知点：** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为空间任一外点。
- **已知线：** L 过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，方向向量 $\mathbf{s} = \{m, n, p\}$。
- **几何原理：** 利用 $\overrightarrow{M_1P_0}$ 与 $\mathbf{s}$ 构成的平行四边形面积除以底边长：
  - **面积：** $S = |\overrightarrow{M_1P_0} \times \mathbf{s}|$；
  - **底长：** $a = |\mathbf{s}|$。

最终公式 (Algebraic Result)

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1P_0} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}$$

6. 综合案例与小结

COMPREHENSIVE CASE & SUMMARY

综合演练 (镜像考点)

题目：求过直线 $L: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 且垂直于平面 $\Pi_0: x+y+z=0$ 的平面方程。

解析：

1. **分析条件：** 求平面的法向量 $\mathbf{n}$ 垂直于直线的方向 $\mathbf{s}$，且垂直于已知平面的法向量 $\mathbf{n}_0$。
2. **计算法向量：**

$$\mathbf{n} = \mathbf{s} \times \mathbf{n}_0 = \{1, 2, 3\} \times \{1, 1, 1\} = \{-1, 2, -1\}$$

3. **方程结果：** 利用点 $(0, 0, 0)$

$$-x + 2y - z = 0 \implies x - 2y + z = 0$$

知识小结

- **方向向量** $\mathbf{s} = \{m, n, p\}$ 是直线的核心属性。
- **公式辨析**：涉及面面、线线时使用 cos，**线面时使用** sin。
- **推导技巧**：点到平面的距离用**点积**投影；点到直线的距离用**外积**模长。
- **转化思路**：一般方程化为对称式需找一点，并求两个法矢的叉乘作为方向向量。

课后研讨与任务

- **练习建议**：作业集 8-6 节。
- **提前思考**：空间两异面直线之间的最短距离。
- **预习任务**：第九章 多元函数微分学。