

第八章向量代数与空间解析几何专题复习 (学生版)

MatNoble

2026 年 6 月 2 日

目录

| | |
|--------------------|-----------|
| 复习导引 | 3 |
| 1 考点一:向量的运算 | 4 |
| 知识点汇总 | 4 |
| 经典例题讲解 | 5 |
| 例题变式 | 6 |
| 2 考点二:曲面方程 | 7 |
| 知识点汇总 | 7 |
| 经典例题讲解 | 7 |
| 例题变式 | 8 |
| 3 考点三:平面方程 | 9 |
| 知识点汇总 | 9 |
| 经典例题讲解 | 9 |
| 例题变式 | 10 |
| 4 考点四:直线方程 | 10 |
| 知识点汇总 | 10 |
| 经典例题讲解 | 10 |
| 例题变式 | 11 |

| | |
|-----------------------|-----------|
| 5 考点五:平面与平面的夹角 | 12 |
| 知识点汇总 | 12 |
| 经典例题讲解 | 12 |
| 例题变式 | 12 |
| 6 考点六:直线与平面的夹角 | 13 |
| 知识点汇总 | 13 |
| 经典例题讲解 | 13 |
| 例题变式 | 13 |
| 7 考点七:直线与直线的夹角 | 14 |
| 知识点汇总 | 14 |
| 经典例题讲解 | 14 |
| 例题变式 | 15 |

复习导引

本讲义围绕期末复习中第八章的七个高频考点展开：

1. 向量的运算；
2. 曲面方程；
3. 平面方程；
4. 直线方程；
5. 平面与平面的夹角；
6. 直线与平面的夹角；
7. 直线与直线的夹角。

1 考点一:向量的运算

知识点汇总

1. 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

2. 数量积满足交换律:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

3. 向量积的坐标计算:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

计算时可按第一行展开:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. 向量积满足反交换律:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

5. 向量积与混合积的几何意义:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta,$$

表示以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为邻边的平行四边形面积; 若

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0,$$

则三个向量共面。

6. 平行与垂直判定:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

7. 投影公式: \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上的数量投影为

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

8. 夹角公式:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

经典例题讲解

1. 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是任意两个向量, 下述不正确的是()。

(A) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(B) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(C) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$

(D) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

2. 向量 $(1, 1, 0)$ 与向量 $(1, 0, 1)$ 的数量积为 _____; 向量积为 _____; 夹角为 _____。

3. 已知 $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1), M_3(3, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 同时垂直的单位向量。

例题变式

1. 设 $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 及二者夹角。

2 考点二:曲面方程

知识点汇总

1. 柱面:方程中缺少某个变量,则曲面沿该变量对应轴方向平移生成。例如 $x^2 + y^2 = 1$ 是圆柱面。

2. 旋转抛物面:

$$z = x^2 + y^2$$

是绕 z 轴的旋转抛物面。

3. 圆锥面:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

是绕 z 轴的圆锥面。

4. 球面:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

表示球心为 (a, b, c) 、半径为 R 的球面。

5. 椭球面、双曲面和抛物面通常通过平方项符号和一次项变量识别:三个平方项同号常对应椭球型;平方项异号常对应双曲型;某一变量一次出现常对应抛物型。

6. 抛物柱面:

$$x^2 = y$$

方程缺少 z ,沿 z 轴方向延伸。

经典例题讲解

1. 以下空间曲面中,代表旋转抛物面的是()。

(A) $3x^2 + y^2 = 1$

(B) $x^2 = y$

(C) $z = x^2 + y^2$

(D) $z^2 = x^2 + y^2$

例题变式

1. 曲面 $x^2 + z^2 = 4$ 是()。

(A) 球面

(B) 圆柱面

(C) 圆锥面

2. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 是()。

3 考点三:平面方程

知识点汇总

1. 点法式平面方程:过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 的平面为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. 若所求平面垂直于两个已知平面, 则其法向量应同时垂直于两个已知平面的法向量, 因此可取

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

3. 三点确定平面:过不共线三点 A, B, C 的平面法向量可取

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

4. 若平面过原点, 则常数项为 0, 可写成

$$Ax + By + Cz = 0.$$

5. 点到平面距离:点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

经典例题讲解

1. 求过原点且垂直于两平面

$$x - y + z - 7 = 0 \quad \text{和} \quad 3x + 2y - 12z + 5 = 0$$

的平面方程。

例题变式

1. 求过点 $P(1, -1, 2)$ 且法向量为 $(2, 0, -3)$ 的平面方程。

4 考点四:直线方程

知识点汇总

1. 点向式直线方程:过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $\mathbf{s} = (m, n, p)$ 的直线为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

2. 若直线垂直于平面, 则直线方向向量可取该平面的法向量。
3. 若直线是两个平面的交线, 则方向向量可取两个平面法向量的叉积。
4. 直线的参数方程:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt.$$

5. 点到直线距离:点 P 到过点 M_0 、方向向量为 \mathbf{s} 的直线距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0P} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

经典例题讲解

1. 过点 $M(2, 1, 3)$ 且与平面 $3x + 2y - z + 1 = 0$ 垂直的直线方程。

例题变式

1. 求过点 $A(1, 0, -2)$ 且平行于向量 $(2, -1, 3)$ 的直线方程。

2. 求过点 $P(1, 1, 1)$ 且包含直线

$$L: \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

的平面方程。

5 考点五:平面与平面的夹角

知识点汇总

1. 平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的法向量为

$$\mathbf{n} = (A, B, C).$$

2. 两平面的夹角等于两个法向量的夹角或其补角,通常取锐角:

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}.$$

经典例题讲解

1. 求平面 $2x + y - z - 1 = 0$ 与平面 $x - y - 2z + 4 = 0$ 的夹角。

例题变式

1. 求平面 $x + y + z - 1 = 0$ 与平面 $x - y = 0$ 的夹角。

6 考点六:直线与平面的夹角

知识点汇总

1. 直线方向向量为 \mathbf{s} , 平面法向量为 \mathbf{n} 。
2. 直线与平面的夹角记为 θ , 它与 \mathbf{s} 和 \mathbf{n} 的夹角互余:

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{s}| |\mathbf{n}|}.$$

3. 若 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$, 则直线平行于平面; 若 $\mathbf{s} \parallel \mathbf{n}$, 则直线垂直于平面。
4. 判断直线是否在平面内: 除 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$ 外, 还需验证直线上一点是否满足平面方程。

经典例题讲解

1. 求直线

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{2}$$

与平面 $x + y + 5 = 0$ 的夹角。

例题变式

1. 求直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的夹角。

7 考点七:直线与直线的夹角

知识点汇总

1. 空间直线的对称式

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

的方向向量为 (m, n, p) 。

2. 若直线以两个平面交线给出:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

则其方向向量可取两个法向量的叉积:

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

3. 两直线夹角按方向向量求:

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1| |\mathbf{s}_2|}.$$

4. 两直线位置关系: 方向向量平行时, 两直线平行或重合; 方向向量不平行时, 若能解出公共点则相交, 否则为异面直线。

5. 两异面直线距离: 若直线分别过 P_1, P_2 , 方向向量为 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, 则

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}.$$

经典例题讲解

1. 设有二直线

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}, \quad L_2: \begin{cases} x-y=8, \\ 2y+z=3, \end{cases}$$

则 L_1 与 L_2 的夹角为()。

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

例题变式

1. 求直线 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ 与 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$ 的夹角。