第八章向量代数与空间解析几何专题复习 (教师版)

MatNoble

2026 年 6 月 2 日

目录

复习导引

本讲义围绕期末复习中第八章的七个高频考点展开：

1. 向量的运算；
2. 曲面方程；
3. 平面方程；
4. 直线方程；
5. 平面与平面的夹角；
6. 直线与平面的夹角；
7. 直线与直线的夹角。

1 考点一:向量的运算

知识点汇总

1. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\qquad |\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

2. 数量积满足交换律:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

3. 向量积的坐标计算:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1).$$

计算时可按第一行展开:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}.$$

4. 向量积满足反交换律:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

5. 向量积与混合积的几何意义:

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积;若

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

则三个向量共面。

6. 平行与垂直判定:

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0,\qquad\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

7. 投影公式：$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的数量投影为

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

8. 夹角公式：

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}.$$

经典例题讲解

1. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是任意两个向量，下述不正确的是（　）。

(A) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$　　(B) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(C) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$　　(D) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

【解】数量积满足交换律，故 A 正确。向量积满足反交换律

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a},$$

一般不满足交换律，所以 B 不正确。C、D 分别是平行和垂直的标准判定。故选 B。

2. 向量 $(1,1,0)$ 与向量 $(1,0,1)$ 的数量积为 __1__；向量积为 __$(1,-1,-1)$__；夹角为 __$\pi/3$__。

【解】设 $\boldsymbol{a} = (1,1,0), \boldsymbol{b} = (1,0,1)$。则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1.$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - \boldsymbol{j}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + \boldsymbol{k}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (1,-1,-1).$$

又 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$，故

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

3. 已知 $M_1(1,-1,2), M_2(3,3,1), M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 同时垂直的单位向量。

【解】

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-1, 3-(-1), 1-2) = (2,4,-1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (3-1, 1-(-1), 3-2) = (2, 2, 1).$$

同时垂直的方向可取二者的向量积:

$$(2,4,-1)\times(2,2,1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(4\cdot 1-(-1)\cdot 2)-\boldsymbol{j}(2\cdot 1-(-1)\cdot 2)+\boldsymbol{k}(2\cdot 2-4\cdot 2) = (6,-4,-4).$$

其模为

$$\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

故所求单位向量为

$$\pm\frac{(6,-4,-4)}{2\sqrt{17}} = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

例题变式

1. 设 $\boldsymbol{a} = (2,-1,2)$, $\boldsymbol{b} = (1,2,-2)$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及二者夹角。

【解】

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2-2-4 = -4.$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 6, 5).$$

$|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, 所以

$$\cos\theta = -\frac{4}{9}, \qquad \theta = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right).$$

2 考点二:曲面方程

知识点汇总

1. 柱面:方程中缺少某个变量,则曲面沿该变量对应轴方向平移生成。例如 $x^2 + y^2 = 1$ 是圆柱面。

2. 旋转抛物面:
$$z = x^2 + y^2$$
是绕 z 轴的旋转抛物面。

3. 圆锥面:
$$z^2 = x^2 + y^2$$
是绕 z 轴的圆锥面。

4. 球面:
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$
表示球心为 (a, b, c)、半径为 R 的球面。

5. 椭球面、双曲面和抛物面通常通过平方项符号和一次项变量识别:三个平方项同号常对应椭球型;平方项异号常对应双曲型;某一变量一次出现常对应抛物型。

6. 抛物柱面:
$$x^2 = y$$
方程缺少 z,沿 z 轴方向延伸。

经典例题讲解

1. 以下空间曲面中,代表旋转抛物面的是(　)。

(A) $3x^2 + y^2 = 1$　　(B) $x^2 = y$　　(C) $z = x^2 + y^2$　　(D) $z^2 = x^2 + y^2$

【解】(A) 是椭圆柱面;(B) 是抛物柱面;(C) 中 z 等于 $x^2 + y^2$,绕 z 轴旋转对称,是旋转抛物面;(D) 是圆锥面。故选 C。

例题变式

1. 曲面 $x^2 + z^2 = 4$ 是(　)。

   (A) 球面　　(B) 圆柱面　　(C) 圆锥面

   【解】方程中缺少 y, 表示沿 y 轴方向延伸的圆柱面, 故选 B。

2. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 是(　)。

   【解】这是以原点为球心、半径为 3 的球面。

3 考点三:平面方程

知识点汇总

1. 点法式平面方程:过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 的平面为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. 若所求平面垂直于两个已知平面, 则其法向量应同时垂直于两个已知平面的法向量, 因此可取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2.$$

3. 三点确定平面:过不共线三点 A, B, C 的平面法向量可取

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

4. 若平面过原点, 则常数项为 0, 可写成

$$Ax + By + Cz = 0.$$

5. 点到平面距离:点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

经典例题讲解

1. 求过原点且垂直于两平面

$$x - y + z - 7 = 0 \quad 和 \quad 3x + 2y - 12z + 5 = 0$$

的平面方程。

【解】 两已知平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = (1, -1, 1), \qquad \boldsymbol{n}_2 = (3, 2, -12).$$

所求平面垂直于这两个平面, 因此其法向量应同时垂直于 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$, 可取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} = (10, 15, 5).$$

可化简为

$$\boldsymbol{n} = (2, 3, 1).$$

又所求平面过原点, 所以平面方程为

$$2x + 3y + z = 0.$$

例题变式

1. 求过点 $P(1, -1, 2)$ 且法向量为 $(2, 0, -3)$ 的平面方程。

【解】由点法式:

$$2(x-1) + 0(y+1) - 3(z-2) = 0.$$

化简得

$$2x - 3z + 4 = 0.$$

4 考点四:直线方程

知识点汇总

1. 点向式直线方程:过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 的直线为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

2. 若直线垂直于平面, 则直线方向向量可取该平面的法向量。

3. 若直线是两个平面的交线，则方向向量可取两个平面法向量的叉积。

4. 直线的参数方程：

$$x = x_0 + mt, \qquad y = y_0 + nt, \qquad z = z_0 + pt.$$

5. 点到直线距离：点 P 到过点 M_0、方向向量为 $\boldsymbol{s}$ 的直线距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0P} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

经典例题讲解

1. 过点 $M(2,1,3)$ 且与平面 $3x + 2y - z + 1 = 0$ 垂直的直线方程。

【解】平面 $3x + 2y - z + 1 = 0$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (3, 2, -1).$$

因为所求直线与平面垂直，所以直线方向向量可取

$$\boldsymbol{s} = (3, 2, -1).$$

又直线过点 $M(2,1,3)$，故直线方程为

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

例题变式

1. 求过点 $A(1,0,-2)$ 且平行于向量 $(2,-1,3)$ 的直线方程。

【解】直接使用点向式：

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}.$$

2. 求过点 $P(1,1,1)$ 且包含直线

$$L:\begin{cases}x-y=0,\\ y+z-1=0\end{cases}$$

的平面方程。

【解】直线 L 是两个平面的交线。两平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,0),\qquad \boldsymbol{n}_2=(0,1,1),$$

所以 L 的方向向量可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-1,-1,1).$$

令 $y=0$, 由 $x-y=0,\ y+z-1=0$ 得直线上一点 $M(0,0,1)$。平面同时包含 $\boldsymbol{s}$ 和 $\overrightarrow{MP}=(1,1,0)$, 故法向量可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{MP}=(-1,-1,1)\times(1,1,0)=(-1,1,0).$$

由点法式得

$$-(x-1)+(y-1)=0,$$

即

$$x-y=0.$$

5 考点五：平面与平面的夹角

知识点汇总

1. 平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (A, B, C).$$

2. 两平面的夹角等于两个法向量的夹角或其补角，通常取锐角：

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}.$$

经典例题讲解

1. 求平面 $2x + y - z - 1 = 0$ 与平面 $x - y - 2z + 4 = 0$ 的夹角。

【解】两平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = (2, 1, -1), \qquad \boldsymbol{n}_2 = (1, -1, -2).$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3.$$

$$|\boldsymbol{n}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \qquad |\boldsymbol{n}_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

所以

$$\cos\theta = \frac{|3|}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

例题变式

1. 求平面 $x + y + z - 1 = 0$ 与平面 $x - y = 0$ 的夹角。

【解】法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = (1, 1, 1), \qquad \boldsymbol{n}_2 = (1, -1, 0).$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0.$$

所以两个平面垂直, 夹角为 $\pi/2$。

6 考点六:直线与平面的夹角

知识点汇总

1. 直线方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 平面法向量为 $\boldsymbol{n}$。

2. 直线与平面的夹角记为 θ, 它与 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的夹角互余:

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\,|\boldsymbol{n}|}.$$

3. 若 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, 则直线平行于平面;若 $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{n}$, 则直线垂直于平面。

4. 判断直线是否在平面内:除 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ 外, 还需验证直线上一点是否满足平面方程。

经典例题讲解

1. 求直线

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{2}$$

与平面 $x + y + 5 = 0$ 的夹角。

【解】直线方向向量为

$$\boldsymbol{s} = (-2, -1, 2).$$

平面 $x + y + 5 = 0$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (1, 1, 0).$$

设直线与平面的夹角为 θ, 则

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\,|\boldsymbol{n}|} = \frac{|-2-1|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

例题变式

1. 求直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 与平面 $x+y+z=1$ 的夹角。

   【解】直线方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,1)$, 平面法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$。二者平行, 故直线垂直于平面, 夹角为 $\pi/2$。

7 考点七:直线与直线的夹角

知识点汇总

1. 空间直线的对称式
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$
的方向向量为 (m,n,p)。

2. 若直线以两个平面交线给出:
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$
则其方向向量可取两个法向量的叉积:
$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2.$$

3. 两直线夹角按方向向量求:
$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|}.$$

4. 两直线位置关系:方向向量平行时,两直线平行或重合;方向向量不平行时,若能解出公共点则相交,否则为异面直线。

5. 两异面直线距离:若直线分别过 P_1,P_2,方向向量为 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$,则
$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}.$$

经典例题讲解

1. 设有二直线
$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1},\qquad L_2:\begin{cases} x-y=8, \\ 2y+z=3, \end{cases}$$
则 L_1 与 L_2 的夹角为(　)。

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

【解】L_1 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1 = (1, -2, 1).$$

L_2 是两个平面的交线。两个平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = (1, -1, 0), \qquad \boldsymbol{n}_2 = (0, 2, 1).$$

故 L_2 的方向向量可取

$$\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (-1, -1, 2).$$

于是

$$\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = 1 \cdot (-1) + (-2)(-1) + 1 \cdot 2 = 3.$$

且

$$|\boldsymbol{s}_1| = \sqrt{6}, \qquad |\boldsymbol{s}_2| = \sqrt{6}.$$

所以

$$\cos\theta = \frac{|3|}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

故选 C。

例题变式

1. 求直线 $L_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$ 与 $L_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{0}$ 的夹角。

   【解】两直线方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1 = (1, 1, 0), \qquad \boldsymbol{s}_2 = (1, -1, 0).$$

$$\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = 0.$$

   所以夹角为 $\pi/2$。