第九章多元函数微分学专题复习 (学生版)

MatNoble

2026 年 6 月 5 日

目录

复习导引

本讲义围绕第九章多元函数微分学的八类期末高频考点展开:

1. 二元函数的定义域;
2. 二元函数的极限;
3. 偏导数;
4. 连续、偏导数与可微的关系;
5. 全微分;
6. 复合函数的偏导数;
7. 隐函数求偏导数;
8. 多元函数的极值。

1 考点一:求二元函数的定义域

知识点汇总

1. 二元函数定义域是使表达式有意义的所有点 (x, y) 的集合。

2. 常见限制:

形式	限制
$\sqrt{g(x,y)}$	$g(x,y) \geq 0$
$\ln g(x,y)$	$g(x,y) > 0$
$\dfrac{1}{g(x,y)}$	$g(x,y) \neq 0$
$\arcsin g(x,y), \arccos g(x,y)$	$-1 \leq g(x,y) \leq 1$

3. 多个限制同时出现时,定义域取交集。写集合时要注意边界是否包含。

4. 几何描述常用圆盘、圆外、半平面、带状区域及其交集。

经典例题讲解

1. 设

$$f(x,y) = \ln\sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

则 $f(x,y)$ 的定义域用集合表示为 ________________________。

例题变式

1. 求函数

$$z = \frac{\sqrt{x+y}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$$

的定义域。

2　考点二:求二元函数的极限

知识点汇总

1. 若函数在趋近点附近由初等函数复合而成且分母不为 0,可直接代入。

2. 若得到 0/0 型,可尝试等价无穷小:

$$\ln(1+u)\sim u,\quad \sin u\sim u,\quad e^u-1\sim u\quad (u\to 0).$$

3. 证明极限不存在常用路径法。若沿两条路径得到不同极限,则二元极限不存在。

4. 证明极限为 0 常用夹逼:

$$\left|\frac{x^m y^n}{x^2+y^2}\right|$$

   可结合 $x^2\le x^2+y^2$, $y^2\le x^2+y^2$ 放缩。

5. 含 x^2+y^2 的原点极限,也可令

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad r\to 0^+.$$

经典例题讲解

1. 计算

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x}{\sqrt{1-xy}-1}.$$

2. 计算

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(1+xy)}{y}.$$

例题变式

1. 判断极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

是否存在。

3 考点三:求偏导数

知识点汇总

1. 求 f_x 时,把 y 看作常数;求 f_y 时,把 x 看作常数。

2. 在具体点处求偏导数,若表达式较复杂,可先求一般偏导再代点;若点在分段边界上,常需用定义。

3. 偏导数定义:
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$
$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

4. 高阶偏导要注意求导顺序。若二阶偏导在点附近连续,则
$$f_{xy}=f_{yx}.$$

经典例题讲解

1. 设
$$z=x^2y-x^3y^2+(x+1)e^{-2xy},$$
求
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,0)},\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,0)}.$$

例题变式

1. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$。

4 考点四:连续、偏导数与可微的关系

知识点汇总

1. 二元函数在点处可微,则函数在该点连续,且两个偏导数存在。

2. 两个偏导数存在,不一定连续,也不一定可微。

3. 函数连续,不一定偏导数存在。

4. 若 f_x, f_y 在点的某邻域内存在,并且在该点连续,则 f 在该点可微。

5. 常用推出关系:

$$f_x, f_y \text{ 连续} \Longrightarrow f \text{ 可微} \Longrightarrow f \text{ 连续},$$

$$f \text{ 可微} \Longrightarrow f_x, f_y \text{ 存在}.$$

经典例题讲解

1. 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处(　　　)。

(A) 连续,且偏导数存在

(B) 不连续,但偏导数存在

(C) 连续,但偏导数不存在

(D) 不连续,且偏导数不存在

2. 考虑函数 $f(x,y)$ 的下列条件性质:

(1) $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 连续, (2) $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 连续,

(3) $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 可微, (4) $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在.

用 $P\Rightarrow Q$ 表示可由性质 P 推出性质 Q,则正确的是(　　)。

(A) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$

(B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

(C) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$

(D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

例题变式

1. 判断命题"若 $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 存在,则 f 在 $(0,0)$ 连续"是否正确。

5 考点五：全微分

知识点汇总

1. 若 $z = f(x, y)$ 可微，则

$$\mathrm{d}z = f_x(x, y)\,\mathrm{d}x + f_y(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

2. 在点 (x_0, y_0) 处：

$$\mathrm{d}z\Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y.$$

3. 全微分可用于近似计算：

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f_x\Delta x + f_y\Delta y.$$

4. 课堂做题口径：分别求偏导，贴上微分标签，最后线性叠加。复杂复合函数或隐函数也可利用全微分形式不变性统一处理。

经典例题讲解

1. 函数

$$z = x^2 + y^2 + 3xy - 2x$$

在 $(1, 0)$ 点处的全微分为

$$\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

例题变式

1. 求 $z = e^{xy} + x^2 y$ 在点 $(0, 1)$ 处的全微分。

6 考点六:复合函数的偏导数

知识点汇总

1. 若 $z = f(u, v)$,$u = u(x, y)$,$v = v(x, y)$,则

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x, \qquad z_y = f_u u_y + f_v v_y.$$

2. 若 $z = f(x, u)$,$u = u(x, y)$,注意 x 同时可能是外层自变量和内层变量:

$$z_x = f_1 + f_2 u_x, \qquad z_y = f_2 u_y.$$

   这里 f_1 表示 f 对第一个变量求偏导,f_2 表示对第二个变量求偏导。

3. 做题时先画变量依赖关系,再逐支相加。

4. 也可用全微分法:先写

$$\mathrm{d}z = f_1\,\mathrm{d}u + f_2\,\mathrm{d}v,$$

   再把 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 展开为 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 的线性组合,最后比较 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 的系数。

经典例题讲解

1. 设

$$z = f\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

   其中 f 具有一阶连续偏导数,求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

例题变式

1. 设

$$z = f(xy, x + y),$$

其中 f 具有一阶连续偏导数，求 z_x, z_y。

7 考点七:隐函数求偏导数

知识点汇总

1. 若方程

$$F(x,y,z)=0$$

   确定隐函数 $z=z(x,y)$,且 $F_z\neq 0$,则

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z},\qquad z_y=-\frac{F_y}{F_z}.$$

2. 课堂推荐做法是直接微分法:

$$\mathrm{d}F=F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z=0.$$

   先把 $\mathrm{d}z$ 视为未知量整理出来,再比较 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 的系数。上面的公式是直接微分法的快捷结果。

3. 若题目给出具体点,应先由方程求出该点对应的 z,再代入公式或全微分结果。

经典例题讲解

1. 设方程

$$\ln(x^2+y^2)+e^z=3xyz$$

   确定了隐函数 $z=f(x,y)$,求

$$\frac{\partial z}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

例题变式

1. 若

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

   确定 $z = z(x, y)$，求 z_x, z_y。

8　考点八：多元函数的极值

知识点汇总

1. 无约束极值的必要条件：若 f 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

2. 二阶判别法：设

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0),$$

$$\Delta = AC - B^2.$$

若 $\Delta > 0, A > 0$，则为极小值；若 $\Delta > 0, A < 0$，则为极大值；若 $\Delta < 0$，则不是极值；若 $\Delta = 0$，需另判。

3. 有约束极值可用代入法或拉格朗日乘数法。

4. 闭区域上的最大最小值，要同时检查内部驻点和边界。

经典例题讲解

1. 函数

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2 + 1$$

的极值点是(　　　)。

(A) $(2, 0)$　　(B) $(2, 2)$　　(C) $(0, 0)$　　(D) $(0, 2)$

2. 求

$$f(x, y) = 4 - x - y$$

在圆

$$x^2 + y^2 = 1$$

上的极值。

3. 设某消费者的效用函数为

$$U(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y,$$

其中 x 是甲商品数量，y 是乙商品数量。若单价 $P_x = 1, P_y = 4$，可支配收入为 48，求 x, y 分别为多少时效用最大。

例题变式

1. 求函数

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$$

的极值。