厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

1-1 命题符号化及联结词

第一章 命题逻辑

张 振

信息科学与技术学院

课程介绍：离散数学与 AI

- **离散量 vs 连续量**：
  - 微积分研究连续变化（如温度、速度），而离散数学研究离散的、不连续的结构（如整数、图、逻辑状态）。
  - 计算机的本质是**离散的**（0 和 1）。
- **从逻辑到智能（思考延伸）**：
  - 为什么我们要学习《离散数学》？因为它是计算机科学与现代人工智能的**核心基石**。
  - 在探索让机器具备智能的过程中，我们需要通过严谨的逻辑规则让机器进行推理，而**命题逻辑**正是这一切最基础的工具。

Try This First：骑士与无赖的岛屿

即时练习

背景谜题（Knights and Knaves）：
在一个神秘的岛屿上，只住着两种人：

- 骑士（Knights）：永远只说真话。
- 无赖（Knaves）：永远只说假话。

有一天你来到岛上，遇到了居民 A 和 B。
此时，A 对你说了一句话："我们两个都是无赖。"

请思考：A 和 B 分别是什么身份？

你的大脑是否开始“绕晕”了？让我们尝试推演：

1. 假设 A 是“骑士”（说真话），那他说的“我们都是无赖”就是真的，意味着 A 是无赖。这与假设**矛盾**！
2. 所以，A 只能是“无赖”。
3. 既然 A 是无赖，那他说的“我们都是无赖”就是**假话**。
4. “两人都是无赖”的反面是：“**至少有一个人不是无赖**”。
5. 因为 A 已经是无赖了，所以 B 必须是骑士！

结论：A 是无赖，B 是骑士。

> **核心启示**：当语句变得复杂，仅靠自然语言的直觉容易出错乃至“烧脑”。我们需要一套像运算加减乘除一样严谨的“**代数工具**”来计算真假——这就是今天的主题：**命题逻辑**。

1. 命题的定义（Definition）

- **命题（Proposition）**
  能判断**真假**的**陈述句**。
- **判断标准（必须同时满足）**：
  1. 必须是陈述句（疑问句、祈使句、感叹句均不是）。
  2. 必须有唯一的真假值（True 或 False），不能模棱两可。
- **真值**：
  - 若陈述符合事实，则真值为真（True，记为 T 或 1）。
  - 若陈述不符事实，则真值为假（False，记为 F 或 0）。

即时练习

练习 1.1.1：判断下列句子是否为命题，并说明理由。

1. 北京是中国的首都。
2. $2+2=5$。
3. 去把门关上！
4. $x>5$。
5. 我正在撒谎。

练习解析：判断命题

解析：

1. **是**。陈述句，且真值为真 (T)。
2. **是**。陈述句，且真值为假 (F)。即使是错的，它也是命题。
3. **否**。祈使句，无法判断真假。
4. **否**。虽然是陈述形式，但在给定 x 的值之前，无法判断真假（我们称之为**命题函数**或谓词）。
5. **否**。著名的“说谎者悖论”，真假无法自洽。

2. 命题的分类与符号化

- **简单命题（原子命题）**：
  不能再分解为更简单命题的命题。
  - 通常用小写英文字母 p, q, r, s 等表示。
  - 例：p：雪是白色的。
- **复合命题**：
  由简单命题通过**联结词**组合而成的命题。
  - 例："如果明天下雨，那么我就不出门。"
  - 这里包含两个原子命题：p：明天下雨；q：我出门。通过"如果...那么..."和"不"连接。
- **符号化的意义**：将自然语言转化为严密的数学符号，消除歧义，便于机器推理。

3. 联结词（重点、难点）

联结词是构建逻辑体系的“运算符”。我们主要研究以下五种基本联结词：

1. **否定（Negation）**：$\neg$
2. **合取（Conjunction）**：$\wedge$
3. **析取（Disjunction）**：$\vee$
4. **蕴涵（Implication）**：$\rightarrow$
5. **等价（Equivalence）**：$\leftrightarrow$

(注：下一节我们将详细探讨每种联结词的真值运算法则及真值表。)

- **否定** $\neg p$ **（非** p**）：**
  - 描述：p 的对立面。
  - 规则：当 p 为 T 时，$\neg p$ 为 F；反之亦然。
- **合取** $p \wedge q$ **（**p **且** q**）：**
  - 描述：表示两个条件同时满足。
  - 规则：**当且仅当** p 和 q 同时为 T 时，$p \wedge q$ 为 T；否则为 F。
  - 常见自然语言："并且"、"不仅...而且..."、"虽然...但是..."。

3.2 析取（Disjunction）

- **析取** $p \vee q$ **(**p **或** q**)**：
  - 描述：表示至少有一个条件成立（相容或）。
  - 规则：只要 p 或 q 中**至少有一个**为 T 时，$p \vee q$ 即为 T；全假才假。
  - 常见自然语言："或者...或者..."。
- *排他或（Exclusive OR, $\oplus$)*：
  - 补充说明：指"两者有且仅有一个成立"。如"这枚硬币是正面或反面"。
  - 标准逻辑通常默认 $\vee$ 为"相容或"。

3.3 蕴涵（Implication）— 最易错的联结词

- **蕴涵 $p \to q$（若 p 则 q）**：
  - **核心概念**：p 是“前件”（前提），q 是“后件”（结论）。
  - **规则（死记硬背）**：只有当 p 为 T，而 q 为 F 时，整个蕴涵式才为 F。其余所有情况均为 T。
- **反直觉的“善意推定”**：
  - 案例：“如果我中了彩票（p），我就给你买跑车（q）。”
  - 如果我没中彩票（$p = F$），无论我最后买没买跑车，你都不能说我“撒谎”（整个承诺算作 T）。
  - **结论**：前提为假时，蕴涵式永远为真！

- **等价 $p \leftrightarrow q$（p 当且仅当 q）：**
  - 描述：表示两个命题的“真假步调”完全一致。
  - 规则：当 p 和 q **同真或同假**时，$p \leftrightarrow q$ 为 T；真假不同时为 F。
  - 等价于互相蕴涵：$(p \to q) \wedge (q \to p)$。
- **常见自然语言：**
  - “当且仅当……”（if and only if / iff）
  - “……是……的充分必要条件”
  - “这等价于……”

即时练习

例题 1.1.1：已知 p：“今天气温低于0度”，q：“今天下雪”，r：“学校停课”。
请将下列语句符号化：
如果今天气温低于0度且下雪，那么除非学校停课，否则我们按原计划考试(s)。

解析：

自然语言往往充满嵌套。我们可以分步剥离：

1. **主干提取**：这是一个大的“如果...那么...”语句，主联结词是**蕴涵** $\to$。
   - 前件：今天气温低于0度且下雪 $\Rightarrow$ **$(p \wedge q)$**
   - 后件：除非学校停课，否则我们按原计划考试(s)。
2. **处理“除非...否则...”句型：**
   - 常见的逻辑等价形式是：“如果不 A，那么 B” 即 $\neg A \to B$。
   - “不”学校停课（$\neg r$），则原计划考试（s） $\Rightarrow$ **$(\neg r \to s)$**。

     (另一种等价翻译是“或”：学校停课或者我们考试 $\Rightarrow r \vee s$)
3. **组合得最终结果：**

$$(p \wedge q) \to (\neg r \to s) \quad \text{或} \quad (p \wedge q) \to (r \vee s)$$

> **技巧总结**：先找句子中起核心转折/假设作用的**主联结词**，再像剥洋葱一样逐层向内符号化。

即时练习

练习 1.1.2：设 p 为“天下雨”，q 为“我带伞”。请将下列命题符号化：

1. 天下雨并且我带伞。
2. 天不下雨，但我也带伞。
3. 虽然天下雨，但我没带伞。

练习解析：命题符号化

解析：

原子命题：p = 天下雨， q = 我带伞。

1. **天下雨并且我带伞。**
    - 包含逻辑“且”。
    - 符号化：$p \wedge q$
2. **天下不下雨，但我也带伞。**
    - 天不下雨：$\neg p$。逻辑“但”表示并列关系，等同于“且”。
    - 符号化：$\neg p \wedge q$
3. **虽然天下雨，但我没带伞。**
    - 我没带伞：$\neg q$。逻辑“虽然...但...”表示转折，在逻辑中也是“且”关系。
    - 符号化：$p \wedge \neg q$

即时练习

回顾开局的谜题（Knights and Knaves）：
居民 A 对你说：“我们两个都是无赖。”
A 和 B 分别是什么身份?

用命题公式“代数化”推演谜题 (1/2)

第一步：符号化原子命题

- 设 p：“A 是骑士”，则 $\neg p$：“A 是无赖”。
- 设 q：“B 是骑士”，则 $\neg q$：“B 是无赖”。

第二步：翻译居民 A 的陈述

- A 说：“我们两个都是无赖”。
- 记作 S_A，由于包含“且”的逻辑，符号化为公式：$\neg p \wedge \neg q$ 。

第三步：建立判定原则

- 在这个岛上，只有两种合法状态：
  - **情况一**：如果 A 是骑士（p 为 T），那么他说的话 S_A 必须为 T。
  - **情况二**：如果 A 是无赖（p 为 F），那么他说的话 S_A 必须为 F。

用命题公式“代数化”推演谜题 (2/2)

第四步：代入穷举检验（这就是雏形的真值表！）

1. **检验情况一（假设 $p = T$）**：
   - 将 $p = T$ 代入公式 $S_A = \neg p \wedge \neg q$ 进行计算。
   - 此时 $\neg p$ 为 F，由于合取 $\wedge$ 的性质（全真才真），不管 q 是什么，S_A 的计算结果都必定为 F。
   - 这与情况一要求的“S_A 必须为 T”发生**矛盾**！所以情况一不成立。
2. **检验情况二（假设 $p = F$）**：
   - 如果 p 为假，说明 A 确实是无赖。符合！
   - 既然 A 是无赖，他的陈述 S_A 必须算出来是 F。
   - 此时 $\neg p$ 为 T。为了让 $S_A = T \wedge \neg q$ 的结果为 F，唯一的办法就是让 $\neg q$ 为 F。
   - 推导出 $\neg q = F$，即 $q = T$!

结论：A 是无赖 $(p = F)$，B 是骑士 $(q = T)$。

> **你看，我们刚刚像机器一样，把 0 和 1 代入公式穷举验证了一遍。这正是下节课将要学习的大杀器——真值表！**

- **本节核心要点**

  1. 命题的判断标准（陈述句、唯一真伪）。
  2. 简单命题的符号表示法。
  3. 基础联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 的意义与应用。

- **逻辑先驱——乔治·布尔（George Boole）**：

  - 《逻辑的数学分析》和《思维规律的研究》的作者。
  - 他在极度贫困的情况下一边做鞋匠帮工一边自学，开创了用代数方法研究逻辑思维的先河（布尔代数），这就是今天计算机背后所有的 `0` 和 `1` 运算的基础。
  - **历史的回音**：真理的基石往往诞生于看似枯燥的坚持与推演之中，哪怕生活艰难，依然可以凭借严密的数理逻辑去丈量世界。

课外拓展

- **练习**：完成习题一相关寻找生活中的离散量的题目。
- **思考点预留**：
  - 自然语言中的“只有...才...”该如何转化为逻辑符号？这与其后的“如果...那么...”有什么本质区别?
  - 请预习：**蕴含联结词**（→）的各种语言描述。