厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

1-2 命题公式及分类

第一章 命题逻辑

张 振
信息科学与技术学院

Try This First：法官与嫌疑人的推理游戏

即时练习

背景谜题：

警方抓获了三个嫌疑人 A, B, C。已知：

1. 若 A 没作案，则 B 也没作案。
2. B 和 C 两人中至少有一人作案。
3. 若 C 作案，那么 A 一定也作案了。

请思考：到底谁是罪犯?

你的大脑是如何思考的?
你的第一反应可能是在心里默默分情况假设：“如果 A 是罪犯...如果 A 不是...”。
但如果我们将 **上一节课的知识（联结词）** 用上，整个案件可以被压缩成一行冰冷的公式：

设命题变项：a, b, c 分别表示 A, B, C 作案。

- 证词 1：“若不 a，则不 b” $\Rightarrow \neg a \to \neg b$
- 证词 2：“b 和 c 至少一人” $\Rightarrow b \vee c$
- 证词 3：“若 c，则一定 a” $\Rightarrow c \to a$
- 三证词必定同时成立（合取）：$(\neg a \to \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \to a)$

只要这个**长公式**的值为真，嫌疑人的真假状态就一目了然！只要交给机器拉一张**真值表**，真相就会水落石出！让我们开始学习它的构造。

1. 命题公式（合式公式）的定义

- **命题常量与变量：**
  - 常量：代表具体真假的符号（T, F）。
  - 变量：代表任意命题的符号（如 p, q, r），在未赋值前，其真假未定。
- **合式公式（Well-Formed Formula, WFF）的递归定义：**

1. 命题常项或变项是一个合式公式。
2. 如果 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式。
3. 如果 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$ 都是合式公式。
4. 只有有限次应用上述规则构成的符号串才是合式公式。

联结词的运算优先级

在使用联结词构建合式公式时，为了**合法省略冗余的括号**，提升可读性，我们约定以下优先级（从高到低）：

$$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

> **精简实例验证**：
> 完整形态： $(((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow s)$
> 省略括号： $p \wedge \neg q \vee r \rightarrow s$
> *(规则：同级并列时，通常自左向右结合)*

> 💡 **防错实战建议**：
> 尽管在大多教材中 $\wedge$ 优先于 $\vee$，但针对**合取与析取混用**（如 $p \wedge q \vee r$）的场景，工程实践上**强烈建议保留该层括号**：$(p \wedge q) \vee r$，以彻底消除歧义黑洞。

即时练习

练习 1.2.1：
请在不改变运算顺序的前提下，尽可能省略以下公式中的冗余括号：
$(((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r) \leftrightarrow (s \vee t))$

解析：

根据优先级排列：$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$

1. 脱去最高级 $\neg$ 的括号：$(((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \leftrightarrow (s \vee t))$
2. $\wedge$ 和 $\vee$ 优先级高于 $\rightarrow$ 与 $\leftrightarrow$，可脱去它们的包裹括号。
3. 最终运算等价的精简结果为：

   $p \wedge \neg q \rightarrow r \leftrightarrow s \vee t$

(利用优先级规定，公式的视觉观感得到了极大地净化。)

公式的解构——子公式（Sub-formula）

- **概念定义**：
  若 A 是合式公式，且 B 是 A 中的一段连续符号串，B 本身也是一个合式公式，则称 B 为 A 的**子公式**。

  (注：公式 A 的最大子公式是 A 本身；最小子公式是它的所有零级变项或常量。)

- **“剥洋葱法”拆解大公式**：
  在计算真假时，我们正是按照“运算优先级”**由小及大**，一层层将子公式求值的。

  以公式 $(p \wedge \neg q) \vee r \to s$ 为例，通过一层层拆解它，其包含的所有层级子公式有：

  1. **0层（变项）**：p, q, r, s
  2. **1层**：$\neg q$ *(最高优先级 $\neg$ 构成)*
  3. **2层**：$p \wedge \neg q$ *(其次由括号内的 $\wedge$ 构成)*
  4. **3层**：$(p \wedge \neg q) \vee r$ *(再次由 $\vee$ 构成)*
  5. **4层（全公式）**：$((p \wedge \neg q) \vee r) \to s$

课堂练习：分解子公式

即时练习

练习 1.2.2：
请列出命题公式 $\neg(p \vee q) \to r$ 的所有层级的子公式。

解析：

按照“剥洋葱法”，从最内层的变量或被括号包裹的核心运算开始：

- **0层（变项）：** p, q, r
- **1层（括号内优先）：** $p \vee q$
- **2层（一元联结词附着）：** $\neg(p \vee q)$
- **3层（全公式总体）：** $\neg(p \vee q) \rightarrow r$

公式的变项与维度：n 元命题公式与赋值

- n **元命题公式**：包含 n 个相互独立命题变项的合式公式。
- **赋值（指派）**：为公式中的 n 个变项分别指定真值（1 或 0）。一共有 2^n 种可能的赋值组合。
- **成真/成假赋值**：
  - 若某组指派代入后，整个大公式**结果为 T(1)** $\rightarrow$ **成真赋值**。
  - 若某组指派代入后，整个大公式**结果为 F(0)** $\rightarrow$ **成假赋值**。

> *(既然所有 2^n 种赋值都有可能使公式成真或成假，那么公式是否可以按最终真假结果的占比来分门别类呢？)*

2. 命题公式的分类

根据 2^n 种赋值下公式的**最终真值表现**，细分为三大类：

1. **重言式（永真式）**：所有指派下结果**全为** 1。
   - *例：$p \vee \neg p$ （排中律）*
2. **矛盾式（永假式）**：所有指派下结果**全为** 0。
   - *例：$p \wedge \neg p$ （自相矛盾）*
3. **可满足式**：**至少有一个**指派使结果为 1。
   - *注：在此定义下，重言式也算可满足式。那些“有真有假”的公式被称为**偶然式**。*

须牢记的三个结论（封闭性法则）：

1. **包含关系**：重言式一定是可满足式，反之不真。
2. **真之闭包**：任意两个重言式的**析取或合取**，仍然是重言式。
3. **假之闭包**：任意两个矛盾式的**析取或合取**，仍然是矛盾式。

习 即时练

练习 1.2.3：

已知公式 A 是重言式，公式 B 是矛盾式。

请问：$A \vee B$ 和 $A \wedge B$ 分别属于哪一类公式?

解析：

我们需要利用重言式和矛盾式在任何赋值下的**常量特性**进行推理：

- A 是重言式，恒为 1； B 是矛盾式，恒为 0。
- $A \vee B \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$。因此 $A \vee B$ 仍然是**重言式**。
- $A \wedge B \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$。因此 $A \wedge B$ 是**矛盾式**。

(将复杂的公式当成已知真值的常量代入，是逻辑演算的高效技巧。)

3. 真值表：判定公式分类的核心工具

- **概念**：
  既然要穷尽 2^n 种所有的赋值结果来给公式定性，我们就需要一个严谨求值的工具——**真值表（Truth Table）**。
- **构造规则（黄金画表法）**：
  - **行数定律**：包含 n 个不同变项的公式，真值表固定有 2^n 行赋值指派。
  - **行排序法**：建议按变项字母表顺序（如 p, q）进行二进制字典序排列（如 $00 \to 01 \to 10 \to 11$）。
  - **列划分法（标准三区分表头）**：
    1. **真值指派列**（左）：枚举单变项（$p, q \ldots$）的所有可能组合。
    2. **子公式阶段列**（中）：按运算优先级，“剥洋葱”般逐层增列写入子公式。
    3. **总公式结果列**（右）：写上终极目标公式的判定结果。

常用联结词真值表（核心重点）

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
$F(0)$	$F(0)$	$T(1)$	0	0	1	1
$F(0)$	$T(1)$	$T(1)$	0	1	1	0
$T(1)$	$F(0)$	$F(0)$	0	1	0	0
$T(1)$	$T(1)$	$F(0)$	1	1	1	1

(提示：强烈建议熟记蕴含 $\rightarrow$ 中 $T \rightarrow F$ 结果为 F 的唯一情况！)

即时练习

例题 1.2.1：
请构造公式 $(p \to q) \land p$ 的真值表。

解析：

该公式包含 p, q 两个变量，共 $2^2 = 4$ 行状态。我们按这三个列分区，“从局部到整体”将其拆解推进：

指派列 (p)	指派列 (q)	子公式列 ($p \to q$)	总公式列 ($(p \to q) \wedge p$)
0 (F)	0 (F)	1	**0**
0 (F)	1 (T)	1	**0**
1 (T)	0 (F)	0	**0**
1 (T)	1 (T)	1	**1**

> **技巧总结**：不要试图在脑中一步出结果，而应将公式肢解成子积木块，一列列往下推进。

习

即时练

练习 1.2.4：
动手尝试：请构造复合命题公式 $(p \vee q) \to \neg p$ 的真值表，并观察最后结果的特点。

练习解析：绘制公式真值表

解析：

p	q	$\neg p$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \rightarrow \neg p$
0	0	1	0	**1** $(0 \rightarrow 1)$
0	1	1	1	**1** $(1 \rightarrow 1)$
1	0	0	1	**0** $(1 \rightarrow 0)$
1	1	0	1	**0** $(1 \rightarrow 0)$

我们发现，该公式在 $2^2 = 4$ 种赋值下，结果**既有 1 也有 0**。根据前方所学的概念，它既不是重言式也不是矛盾式，而是一个纯正的**偶然式（非重言的可满足式）**。

即时练习

例题 1.2.2：

请判断公式 $(p \wedge q) \rightarrow p$ 属于哪一类？（重言式、矛盾式还是偶然式？）

例题解析：观察终极结果判定

解析：

首先构造它的真值表：

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
0	0	0	**1**
0	1	0	**1**
1	0	0	**1**
1	1	1	**1**

结论与技巧：观察主联结词所在的最后一步运算列，由于结果**全为 1（真）**，根据刚刚学习的分类定义，该公式属于**重言式（永真式）**。

(逻辑思维辅助：如果“p 且 q”成立，那么“p”当然成立！真值表证明了它是一条不以现实真假为转移的真理定律。)

即时练习

回顾开局的法官谜题：
已提取出的口供合取公式：
$$S = (\neg a \rightarrow \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \rightarrow a)$$
机器（和你们）将如何用真值表找出唯一的真相?

让证据在 0 和 1 中显形

a	b	c	$\neg a \to \neg b$	$b \vee c$	$c \to a$	**总公式** S **(三者合取)**
0	0	0	1	0	1	**0（假）**
0	0	1	1	1	0	**0（假）**
0	1	0	0	1	1	**0（假）**
0	1	1	0	1	0	**0（假）**
1	0	0	1	0	1	**0（假）**
1	0	1	1	1	1	**1（真）**
1	1	0	1	1	1	**1（真）**
1	1	1	1	1	1	**1（真）**

> **【破案了！】**
> 只有当公式 $S = 1$ 时，案件才成立。我们发现满足条件的只有最后三行。
> 但这三行中，A **$(a = 1)$ 均参与了作案！** 因此，无论同伙是谁，法官都可以立刻下达逮捕令：
> **绝对是罪犯。**

第二节 小结与认知升华

- **逻辑与辩证的对立统一：**
  - 真与假相互对立又统一。重言式揭示了逻辑结构上的绝对必然性，而偶然式则代表了随现实条件而转移的变化。在命题公式的推演中，这正是对世界确定性与随机性辩证统一的数学表达。
- **探索与应用：知识表示的基础：**
  - 在现代专家系统与自动化程序中，机器能够通过连接词（AND/OR/NOT/IF-THEN）构建异常复杂的逻辑网络来描述知识。
  - **命题公式**和**真值计算**是实现基于规则的“自动推理”的核心引擎。机器不懂自然语言的模糊性，但只认严谨的真值表。

作业任务

- **书面练习**：课后习题一：1.1 (1, 3, 5, 7, 9); 1.2; 1.4 (1, 3, 5, 7)。
- **拓展探讨**：
  - 请用语言多方式描述并辨析“蕴含联结”的各类句型（充分条件与必要条件）。
  - 结合今天所学真值表，思考当变量达到 10 个时（2^{10} = 1024 行），仅凭真值表暴力法会有什么缺陷？预习下节课的“等价演算”寻找优化方法。