厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

1-3 命题逻辑等值演算

第一章 命题逻辑

张 振

信息科学与技术学院

引入：真值表方法的局限性

计算复杂度问题：

- **现有判定工具：** 真值表是判定公式是否为重言式的最直接方法。
- **变量规模依赖：** 若命题公式含有 n 个命题变项，其真值表行数为 2^n。
- **组合爆炸：** 当 n 较大（如 $n = 50$）时，真值表行数剧增（2^{50}），导致计算不可行。
- **结论引出：** 需要引入更为高效的公式化简与判定手段——**等值演算**。

引入：逻辑判定代码化简

练即
习时

问题场景：审查以下判定逻辑伪代码。

```
IF (is_vip) OR (NOT is_vip AND has_coupon) THEN
    give_discount()
```

设 A 表示 `is_vip`，B 表示 `has_coupon`。
该程序的执行条件可抽象为逻辑公式：$A \vee (\neg A \wedge B)$。

思考： 该逻辑公式是否可以进一步等价化简，以降低程序的判定复杂度？

一、等值的含义 (Definition)

1. **等值定义**：

- **定义 1.3.1**：设 A, B 为命题公式。若在各个命题变项的所有可能赋值组合下，A 与 B 的**真值均相同**，则称公式 A 与 B **逻辑等值**。
- **记法**：记作 $A \Leftrightarrow B$ 或 $A \equiv B$。
- **补充说明**：$\Leftrightarrow$ 为元语言符号，表示两个公式间的逻辑等价关系，而非公式内部的逻辑联结词。

2. 判定等值的本质定理：

- 若 $A \Leftrightarrow B$ 永远成立，即 A 与 B 具有完全同步的真假特性。
- 根据双蕴涵联结词 $(\leftrightarrow)$ 的定义，当 A 与 B 真值相同时，$A \leftrightarrow B$ 的真值为 1。

> **定理 1.3.1：**
> 命题公式 A 与 B 逻辑等值 $(A \Leftrightarrow B)$，当且仅当双蕴涵公式 $A \leftrightarrow B$ **为重言式**。

第一组：基础等值式

- 1. 双重否定律：

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

- 2. 幂等律：

$$A \vee A \Leftrightarrow A$$
$$A \wedge A \Leftrightarrow A$$

- 3. 交换律：

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

习 即时练

微型练习 0：
试利用双重否定、幂等与交换律，将以下公式化简至最简形式：
$B \wedge \neg\neg(A \vee A)$

练习 0 解析

解析：

$$B \wedge \neg\neg(A \vee A)$$
$$\Leftrightarrow B \wedge (A \vee A) \quad \text{（双重否定律）}$$
$$\Leftrightarrow B \wedge A \quad \text{（幂等律）}$$
$$\Leftrightarrow A \wedge B \quad \text{（交换律，依字母序排列）}$$

- **结论**：复杂的前置否定和冗余的自我析取被成功消解，最终结果为 $A \wedge B$。

基本等值式 (含常量运算)

第二组：含常量等值式（其中 1 代表重言式，0 代表矛盾式）

- **4. 同一律 (Identity Law)：**

$$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$
$$A \vee 0 \Leftrightarrow A$$

- **5. 矛盾律 (Contradiction Law)：**

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

- **6. 排中律 (Excluded Middle)：**

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

即时练习

微型练习 1：
试化简含矛盾规律的命题公式：$A \vee (B \wedge \neg B)$。

解析：

$$
\begin{aligned}
& A \vee (B \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & A \vee 0 \qquad \text{（矛盾律）} \\
\Leftrightarrow\ & A \qquad \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

- **结论：** 原公式可消解恒假冗余，极简形式为 A。

第三组：结构演算法则

- 7. 结合律 (Associative Law)：

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

- 8. 分配律 (Distributive Law)：
  - ∨ 对 ∧ 的分配律：

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

  - ∧ 对 ∨ 的分配律：

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

第四组：化简与否定拆解法则

- 9. 德·摩根律 (De Morgan's Laws)：

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- 10. 吸收律 (Absorption Law)：

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

习 即时练

微型练习 2：
在不使用吸收律的情况下，试推导降维化简复杂的否定结构：
$\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg B$。

练习 2 解析

解析：

$$
\begin{aligned}
&\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg B \\
\Leftrightarrow\ & (\neg A \vee \neg\neg B) \wedge \neg B \quad \text{（德·摩根律）} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg A \vee B) \wedge \neg B \quad \text{（双重否定律）} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \quad \text{（分配律）} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg A \wedge \neg B) \vee 0 \quad \text{（矛盾律）} \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \wedge \neg B \quad \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

- **说明：** 熟练掌握推导法后，对于特定的复杂组合可直出结论。

第五组：联结词转换法则

- **说明**：在等值推演中，常将 $\rightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 转化为 $\vee$ 与 $\wedge$ 进行计算。
- **11. 蕴涵等值式**：

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

- **12. 等价等值式**：

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

1. 等值演算的定义：

- 利用已知的基本等值式，将一个命题公式逐步形变为另一个与其逻辑等值的新公式的过程。

2. 核心规则一：代入规则 (Substitution)：

- **定义：** 设 A 是重言式。将其中的某个命题变项（如 p）的**每一次出现**，统一替换为任意公式 B。
- **定理：** 替换后得到的新公式 A' **依然是重言式。**
- **注意事项：** 替换过程必须具有“全局同步”性，不可仅替换该变项的部分出现。

即时练习

例题 1.3.1：

已知排中律公式 $(p \vee \neg p)$ 为重言式。

请利用代入规则，推演证明复杂公式 $((q \wedge r) \vee \neg(q \wedge r))$ 亦为重言式。

解析：
利用代入规则，可将复杂公式的重言性证明转归为基础定理的使用。

- **第一步：寻找基础重言式模型**
  已知公式 $A = p \vee \neg p$ 恒为真。
- **第二步：确定代入对象**
  令需代入的嵌套公式为 $B = q \wedge r$。
- **第三步：全局替换执行**
  将基础公式 A 中的所有变量 p 统一替换为公式 B，即得：
  $$(q \wedge r) \vee \neg(q \wedge r)$$
- **结论**：
  依据代入规则，新公式继承了母代公式的重言属性，证明其为**重言式**。

核心武器二：置换规则 (Replacement)

置换规则是化简与证明逻辑等值中最常用的代数形变规则。

- **操作原理**：
  设 X 是命题公式 A 的一个局部子公式。若存在另一逻辑公式 Y 满足 $X \Leftrightarrow Y$，则将 A 中的局部 X 替换为 Y，得到新的系统整体公式 A'。
- **推断结论**：
  局部替换所产生的整体新公式满足 $A \Leftrightarrow A'$。
- **核心思想**：
  对公式应用等值结构更换，并不改变整体命题的逻辑语义与分布真值。

即时练习

例题 1.3.2：
请通过基础逻辑定律等值推演，证明分配律的下述形式完全成立：

$$A \to (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \to C)$$

解析：
等值演算的证明策略通常采取从复杂端推导至简单端。证明过程需步步标记所用定律。

推演步骤：

$$
\begin{aligned}
& A \to (B \land C) \\
\Leftrightarrow\ & \neg A \lor (B \land C) \quad \text{（蕴涵等值式）} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg A \lor B) \land (\neg A \lor C) \quad \text{（分配律）} \\
\Leftrightarrow\ & (A \to B) \land (A \to C) \quad \text{（蕴涵等值式的逆向提取）}
\end{aligned}
$$

- **结论：** 等值关系得证。该推导模式有效规避了绘制 $2^3 = 8$ 行真值表的计算冗余。

即时练习

练习 1.3.1：

请利用等值演算，证明以下命题公式为重言式：

$$(p \land q) \to p$$

解析：

证明逻辑为通过等值定律，将命题公式推导为恒真常量 1。

推演步骤：

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \rightarrow p \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \wedge q) \vee p \quad \text{（蕴涵等值式）} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee \neg q) \vee p \quad \text{（德·摩根律）} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee p) \vee \neg q \quad \text{（交换律与结合律重组）} \\
\Leftrightarrow\ & 1 \vee \neg q \quad \text{（排中律：} \neg p \vee p \Leftrightarrow 1\text{）} \\
\Leftrightarrow\ & 1 \quad \text{（常数 1 析取任何值均为 1）}
\end{aligned}
$$

- **结论**：公式逻辑系统等值于真极值 1，故其为**重言式**。由于推导严密，无需穷举。

即时练习

回顾 1.2 节法官谜题：
已知提取三名嫌疑人的口供逻辑合取公式为：

$$S = (\neg a \to \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \to a)$$

思考：在已知该公式 $S = 1$ （全员口供无矛盾且必然发生）的条件下，能否仅凭等值演算判定出主要嫌疑人？

推演步骤：对 S 进行局部联结词消解与因子提取。

$$S = (\neg a \to \neg b) \land (b \lor c) \land (c \to a)$$

$$\Leftrightarrow (a \lor \neg b) \land (b \lor c) \land (\neg c \lor a) \quad \text{（使用蕴涵等值式将 } \to \text{ 转化为 } \lor \text{）}$$

$$\Leftrightarrow (a \lor \neg b) \land (\neg c \lor a) \land (b \lor c) \quad \text{（使用交换律编组）}$$

$$\Leftrightarrow (a \lor (\neg b \land \neg c)) \land (b \lor c) \quad \text{（利用分配律逆向提取 } a \lor \text{）}$$

结论分析：

- 前提已知 $S = 1$。因此推导出的等值逻辑串中，所有合取 $(\land)$ 联结词两端的括号均必须具备真值 1。
- 第二个模块 $(b \lor c) = 1$，揭示嫌疑人 b, c 存在至少一名犯罪者。同时导致 $\neg b \land \neg c = 0$。
- 将其代入第一个模块判断：$(a \lor (\neg b \land \neg c))$ 演变为 $(a \lor 0) = 1$。运用同一律反推，定然得出 $a = 1$。
- **结案**：代数形变的逻辑方程直接锁定了主犯 a。

回顾课前提问：
该程序的判定条件抽象为公式：$A \vee (\neg A \wedge B)$。

利用等值演算完成终极优化：

$$
\begin{aligned}
& A \vee (\neg A \wedge B) \\
\Leftrightarrow\ & (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B) \quad \text{（分配律，让 } A\vee \text{ 穿透括号）} \\
\Leftrightarrow\ & 1 \wedge (A \vee B) \quad \text{（排中律，} A \vee \neg A \Leftrightarrow 1\text{）} \\
\Leftrightarrow\ & A \vee B \quad \text{（同一律，} 1 \wedge X \Leftrightarrow X\text{）}
\end{aligned}
$$

- **最终代码蜕变：**
  原冗长的判定条件 `IF (is_vip) OR (NOT is_vip AND has_coupon)`
  可直接删减为极简的：`IF (is_vip) OR (has_coupon)`。
  这，就是底层数学规律赋予计算科学的优化伟力。

从机械化算力到抽象化归思想

- **勇于探索的试错精神**：
  等值演算通常不存在单一标准路径。化简繁复逻辑公式的过程，实际上是面对未知状态不断试探定律应用并在结果收敛中复盘的螺旋上升。
- **数学先驱的极简追求**：
  推翻穷举“真值表”，建立具有高维度抽象美感的“等值演算系统”，反映出计算学科对系统底层判定效率的深刻追求。以此学术信仰构建庞大完备规则集的历史精神，属于构筑现代计算机基础架构的核心工匠意识。

Sect 1.1 基本概念

- **原子命题**：逻辑大厦的基石（真或假）。
- **五大逻辑联结词**：$\neg$ (非)、$\wedge$ (合取)、$\vee$ (析取)、$\rightarrow$ (蕴涵)、$\leftrightarrow$ (等价)。

Sect 1.2 公式与真值表

- **合式公式生成**：按规则组合原子命题与联结词。
- **真值表判定判定**：可准确求值，但存在“**组合爆炸 (2^n)**”痛点。
- **公式分类**：分为重言式 (永真)、矛盾式 (永假)、可满足式。

Sect 1.3 等值演算 *(本节核心)*

- **基本等值式**：常量的消弱、分配、结合与化简规则。
- **操作法条**：
  - **代入规则**：通过由局部替代整体，批量繁衍新的定理。
  - **置换规则**：同等替换局部结构以执行**降维化简与逻辑证明**。

作业任务

- **书面练习**：
  - 课后习题一：1.4 (2, 4, 6, 8, 10)； 1.5。
- **拓展思考**：
  - 尝试构造一个包含四个变项（p, q, r, s）的新颖公式，并完全利用本课提及的基本定律，在不引入真值表的情况下完成超过 5 步的逻辑缩减。
  - **对称性思考挑战**：审视我们学过的基本等值式，若将其中的所有合取符 $\wedge$ 与析取符 $\vee$ 相互替换，同时颠倒常量 1 与 0 的占位，新得到的式子是否仍然构成公认逻辑等值式律条？这其中是否隐喻着更深层的命题框架结构？（本题将引入后续知识：对偶原理）。