厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

1-4 命题范式 (核心串讲)

第一章 命题逻辑

张 振
信息科学与技术学院

课前悬念：出国考察的逻辑谜题

即时练习

谜题：从甲、乙、丙三人中选派人员出国考察，需满足：
(1) 若甲去，则丙必须去；
(2) 若乙去，则丙不能去；
(3) 甲和乙必须去一人且只能去一人。

问：有几种可能的选派方案?

- 我们能不能用严谨的数学公式，而不是“拍脑袋”瞎猜，来一劳永逸地计算出所有方案?
- （带着这个问题，我们进入今天的核心学习，谜底将在课末揭晓！）

引入：同一逻辑，不同面孔

> **问题**：下面两个公式，直觉上它们是否等值？
>
> $$A = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$
> $$B = p \vee q$$

- 用真值表验证需穷举 $2^2 = 4$ 行，若含 10 个变量则需 1024 行。
- 用等值演算推导方向并不总是显然的。

核心痛点：自然语言转化来的公式结构混乱。我们需要一套**唯一的标准形式**，使得等价的公式必然化出相同的结果。

探索一：【问题】如何将千变万化的逻辑公式“统一着装”?

目标：将所有公式的嵌套结构“压平”，化为基础的积木组合。

定义 1.4.1：命题变项及其否定统称为**文字**（例如 p 和 $\neg p$）。

由有限个文字构成的析取式称为**简单析取式**（如 $\neg p \vee q \vee r$）；
由有限个文字构成的合取式称为**简单合取式**（如 $p \wedge \neg q \wedge \neg r$）。

关键性质：

- 简单析取式为**假**当且仅当所有文字全为假。
- 简单合取式为**真**当且仅当所有文字全为真。

有了基础组件后，我们可以要求所有的逻辑公式排列成两层整齐的结构：

定义 1.4.2（析取范式，DNF）：形如 $C_1 \lor C_2 \lor \cdots \lor C_m$ 的公式，其中每个 C_i 都是**简单合取式**。

- （通俗理解为："合取式"的"析取"）

定义 1.4.3（合取范式，CNF）：形如 $D_1 \land D_2 \land \cdots \land D_m$ 的公式，其中每个 D_i 都是**简单析取式**。

- （通俗理解为："析取式"的"合取"）

> **定理 1.4.1（范式存在定理）**：任何命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。

探索一：基础转换“三板斧”

从普通公式转化为 DNF/CNF，只需遵循以下通用、程式化的三步（算法思维）：

1. **Step 1：消除蕴涵与等价**
   - 策略：用 $\neg, \vee, \wedge$ 替换掉所有 $\rightarrow$ 与 $\leftrightarrow$
   - 核心：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
2. **Step 2：否定内移（德·摩根律）**
   - 策略：将 $\neg$ 不断内移，直到紧贴每一个命题变项
   - 核心：$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ 以及 $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
3. **Step 3：分配律展开**
   - 策略：根据需要求的范式目标，进行分配
   - **求 DNF 时**（欲得外“或”内“与”）：$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
   - **求 CNF 时**（欲得外“与”内“或”）：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

探索一：即时练习（求统一着装）

即时练习

例：求 $((p \vee q) \to r) \to p$ 的析取范式和合取范式。

探索一：示例解析与新问题

$$
\begin{aligned}
((p \lor q) \to r) \to p &\Leftrightarrow \neg((p \lor q) \to r) \lor p && \text{（消除蕴涵）} \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg(p \lor q) \lor r) \lor p && \text{（内层消除蕴涵）} \\
&\Leftrightarrow ((p \lor q) \land \neg r) \lor p && \text{（否定内移：德摩根律与双重否定律）} \\
&\Leftrightarrow (p \land \neg r) \lor (q \land \neg r) \lor p && \text{（用分配律展开，得 DNF）} \\
&\Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor \neg r) && \text{（对第三行应用分配律，得 CNF）}
\end{aligned}
$$

> **发现问题**：DNF 和 CNF **并不唯一**。例如利用吸收律可进一步简化刚才的 DNF。
> 仅仅统一样式还不够，我们还需要进一步寻找**绝不撞衫的唯一指纹**！

探索二：【问题】范式不唯一，如何寻找绝对唯一的“数学指纹

目标：对“简单合取式”和“简单析取式”做极致的限制，强迫所有变量全部登场。

定义 1.4.4：含 n 个命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的**极小项**，是这 n 个变项（各取原式或否定之一）的**简单合取式**，且每个变项恰好出现一次。

- 编号规则：将赋值 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 视为二进制，转为十进制整数 i，记对应极小项为 m_i。
  - p_j 出现在 m_i 中 $\Leftrightarrow i_j = 1$
  - $\neg p_j$ 出现在 m_i 中 $\Leftrightarrow i_j = 0$

关键性质：n 变量共有 2^n 个极小项；m_i **在且仅在**赋值 $(i_1, \ldots, i_n)$ 下取值为 $\mathbf{T}$。

探索二：极小项两变量完整列表

以两个变量 p, q 为例：

编号	赋值 (p, q)	极小项 m_i	取值为 $\mathbf{T}$ 的唯一赋值
m_0	$(0, 0)$	$\neg p \wedge \neg q$	$p = 0, q = 0$
m_1	$(0, 1)$	$\neg p \wedge q$	$p = 0, q = 1$
m_2	$(1, 0)$	$p \wedge \neg q$	$p = 1, q = 0$
m_3	$(1, 1)$	$p \wedge q$	$p = 1, q = 1$

- 任意不同极小项的合取：$m_i \wedge m_j \Leftrightarrow \mathbf{F}$（矛盾式）
- 全体极小项的析取：$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \Leftrightarrow \mathbf{T}$（重言式）

探索二：极致组件之二——极大项（Maxterm）

对“简单析取式”做极致的限制，得到极大项。

定义 1.4.5：含 n 个命题变项的**极大项**，是这 n 个变项（各取原式或否定之一）的**简单析取式**，且每个变项恰好出现一次。

- 编号规则：赋值 $(i_1, \ldots, i_n)$ 对应极大项 M_i；
  - $\neg p_j$ 出现在 M_i 中 $\Leftrightarrow i_j = 1$
  - p_j 出现在 M_i 中 $\Leftrightarrow i_j = 0$

关键性质：M_i **在且仅在**赋值 $(i_1, \ldots, i_n)$ 下取值为 $\mathbf{F}$；且与极小项满足对偶关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$。

即时练习

练习：设变量为 p, q, r（按此顺序编号），判断下列各式是极小项、极大项，还是都不是？若是，给出编号。

1. $p \wedge \neg q \wedge r$
2. $\neg p \vee q \vee \neg r$
3. $p \wedge q$
4. $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

变量顺序 p, q, r 对应位权 $4, 2, 1$。

1. $p \wedge \neg q \wedge r$：合取，三变量齐全，赋值 $(1, 0, 1) \rightarrow$ **极小项** m_5。
2. $\neg p \vee q \vee \neg r$：析取，三变量齐全，令其为假需 $p = 1, q = 0, r = 1 \rightarrow$ **极大项** M_5。
3. $p \wedge q$：缺少变量 r，**两者都不是**。
4. $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$：析取，令其为假需 $p = 1, q = 1, r = 1 \rightarrow$ **极大项** M_7。

既然知道了什么是极小和极大项，我们就可以引入最终的唯一范式概念：

定义 1.4.6：若一个析取范式的每个合取项都是**极小项**，则称其为**主析取范式**（**PDNF**）。

$$A\text{ 的主析取范式} = \bigvee_{i \in S} m_i \quad (\text{其中 } i \text{ 使 } A = \mathbf{T})$$

定义 1.4.7：若一个合取范式的每个析取项都是**极大项**，则称其为**主合取范式**（**PCNF**）。

$$A\text{ 的主合取范式} = \bigwedge_{j \in T} M_j \quad (\text{其中 } j \text{ 使 } A = \mathbf{F})$$

> **定理 1.4.2（唯一性）**：任何非矛盾（或非重言）的式子都存在**唯一**的主析取（或合取）范式。

在动用系统算法前，我们先通过直觉感知一下简单公式（2个变量）的主范式：

练习 即时

案例：求等价联结词 $p \leftrightarrow q$ 的主析取范式与主合取范式。

（思考：它在什么情况下属于真？什么情况下属于假？）

- **逻辑直觉图：**
  - $p \leftrightarrow q$ 对什么时候为**真**？（当 p, q 同假或同真时） $\Rightarrow$ 对应赋值 $(0,0)$ 和 $(1,1)$
  - $p \leftrightarrow q$ 对什么时候为**假**？（当 p, q 异号时） $\Rightarrow$ 对应赋值 $(0,1)$ 和 $(1,0)$
- **直读结论：**
  - **PDNF**： $m_0 \vee m_3 = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
  - **PCNF**： $M_1 \wedge M_2 = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

方法一：**真值表法（暴力破解）**

- **本质**：真值表是**离散真值**表示；主范式是**代数标准**表达式。
- **操作规则**：
  - 真值为 $\mathbf{T}$ 的行索引 $\leftrightarrow$ PDNF 的**极小项** m_i。
  - 真值为 $\mathbf{F}$ 的行索引 $\leftrightarrow$ PCNF 的**极大项** M_j。
- **快速转换**：已知 PDNF 下标集 S，PCNF 下标集 T，则 $S \cup T = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ 且两集合互补。

即时练习

例：用真值表法求 $A=((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的主析取范式与主合取范式。

探索三：真值表法解析

p	q	r	A	对应项
0	0	0	**0**	M_0
0	0	1	**0**	M_1
0	1	0	**1**	m_2
0	1	1	**0**	M_3
1	0	0	**1**	m_4
1	0	1	**1**	m_5
1	1	0	**1**	m_6
1	1	1	**1**	m_7

- **PDNF**：$m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ 或 $\sum(2,4,5,6,7)$
- **PCNF**：$M_0 \wedge M_1 \wedge M_3$ 或 $\prod(0,1,3)$

探索三：方法二：等值演算法

核心思路：缺什么变量，就补什么变量！

- **求 PDNF**：用排中律补变项，式子变为 $C_i \wedge (p_j \vee \neg p_j)$。
- **求 PCNF**：用矛盾律补变项，式子变为 $D_i \vee (p_j \wedge \neg p_j)$。

> **标准步骤：**
>
> 1. 先化为干瘪的 DNF / CNF。
> 2. 对缺项的组合**补全缺失变量**。
> 3. 展开并用吸收律去重，最后按编号排序。

即时练习

例：用等值演算法求 $A = ((p \vee q) \to r) \to p$ 的主析取范式。

$$
\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r) \qquad \text{（先前已化简为 DNF）} \\
&\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge \neg r) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\quad \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \\
&\Leftrightarrow (m_7 \vee m_6 \vee m_5 \vee m_4) \vee (m_6 \vee m_2) \\
&\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7
\end{aligned}
$$

探索三：高阶秒杀挑战（反演思维）

习 即时练

挑战：求 $(p \to q) \to r$ 的主合取与主析取范式。
痛点：若依然用等值演算法正面硬推，需展开补全6个极小项，非常繁琐且易算错。能否用反演思维跳出陷阱？

反向突破口（求假集合）：

- 这个公式为主蕴涵结构，**它为假的情况其实极少！** 仅当 $p \to q$ 为 **1** 且 r 为 **0** 时，整式才为 **0**。
- 必然条件 $r = 0$。此时 $p \to q$ 为 **1**，意味着 (p, q) 的取值只能是 $(0,0), (0,1), (1,1)$。
- 纵向组合起来，该式的成假赋值仅有三组：$(0,0,0), (0,1,0), (1,1,0)$，分别对应极大项 M_0, M_2, M_6。

神速结题（降维打击）：

- 破译**PCNF**：$M_0 \wedge M_2 \wedge M_6 \Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
- 根据**互补定理**，剩下的全为真，瞬间得出**PDNF**：$m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

探索四：【问题】费尽心机求出主范式，到底有什么实际用处？

解答一开篇的疑问：如何判断两个式子是否绝对相等？看指纹！

1. 终极等值判定

- **标准**：主范式是唯一的。
- **结论**：两个公式等值 $\Leftrightarrow$ 它们的主析取范式（或主合取范式）**完全相同**。

2. 给公式“看相”（判断类型）

- **重言式**：PDNF 包含**全部** 2^n 个极小项（PCNF 为空）。
- **矛盾式**：PDNF 为空（PCNF 包含全部 2^n 个极大项）。
- **可满足式**：PDNF **不为空**。

3. 求公式的成真/成假赋值

- **无缝对接工程**：PDNF 中极小项 m_i 的下标 i 直接对应使公式成**真**的二进制赋值；PCNF 极大项下标直接对应成**假**赋值。

> **回顾本课核心例题**：$A = ((p \vee q) \to r) \to p$
>
> - **成真赋值**：PDNF 索引 $\{2, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow \{010, 100, 101, 110, 111\}$
> - **成假赋值**：PCNF 索引 $\{0, 1, 3\} \Rightarrow \{000, 001, 011\}$

背景：某门禁系统管理员设定的权限公式为：$F = ((P \land Q) \lor (\neg P \land R)) \to Q$
（已知 P：通过身份认证，Q：具备管理员权限，R：在白名单内）

逻辑审计推导：

1. **消除蕴涵**：$\neg((P \land Q) \lor (\neg P \land R)) \lor Q$
2. **德·摩根律**：$(\neg(P \land Q) \land \neg(\neg P \land R)) \lor Q$
3. **分配律展开**：$((\neg P \lor \neg Q) \land (P \lor \neg R)) \lor Q$
4. **利用 $Q \lor \neg Q \equiv \mathbf{1}$ 化简**：
   - 将外侧 $\lor Q$ 与第一项结合：$(\neg P \lor \neg Q) \lor Q \equiv (\neg P \lor \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$
   - 与第二项结合后变为：$(P \lor \neg R \lor Q)$
   - **简化规则**：$\mathbf{1} \land (P \lor Q \lor \neg R) \equiv P \lor Q \lor \neg R$

探索四（终极实战）：系统漏洞的致命反击

逻辑审计结论：

经历了四步化简，我们得出的门禁真实放行规则竟然是：

$$F \equiv P \lor Q \lor \neg R$$

深度反思：为什么说这个系统极其“灾难”？

- **致命漏洞**：最终规则里明晃晃的 $\neg \mathbf{R}$ 意味着——**只要你不在白名单里，你就能直接通过门禁！**
- **荒诞现实**：管理员的原意可能是保护内网，但混乱条件的堆叠却造就了一个“路人甲随便进，白名单反而受限”的荒唐系统。
- **终极教益**：这就是离散数学的防雷意义：通过**形式化推导**，我们能用算式，一眼刺穿复杂自然语言背后的逻辑黑洞。

悬念揭晓：解密出国考察的逻辑谜题

课前谜题回顾：甲、乙、丙出国考察，约束如下：
设 p, q, r 分别表示甲去、乙去、丙去。

1. 形式化建模（将口语转为数学算式）：

- 约束(1)：$p \to r$
- 约束(2)：$q \to \neg r$
- 约束(3)：$p \oplus q$ （即 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$）

  系统总公式：$F = (p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$

2. 运用“主范式”求成真赋值（降维打击）：
通过求 F 的主析取范式（真值表或演算法），最终发现它的等值形式为：

$$F \Leftrightarrow m_2 \vee m_5$$

结论：唯有 $m_2(0,1,0)$ 和 $m_5(1,0,1)$ 是使 F 成真的唯二赋值。
因此，共有 **2 种** 选派方案：

1. **甲不去，乙去，丙不去** （对应 m_2）
2. **甲去，乙不去，丙去** （对应 m_5）

AI 融入与思政小结

- **AI 融入：理论完美与计算挑战的博弈**
  - **理论价值**：主范式提供了逻辑的**标准唯一形式**，是理解公式本质的终极数学指纹。
  - **计算挑战**：变量一旦增多，极小项数量呈指数爆炸（2^n），直接构造主范式空间开销惊人。
  - **工业落地**：现代 SAT 求解器（如 Z3）在工程实践中不会硬求主范式，而是先化为 **CNF**，通过推断 $\neg(A \leftrightarrow B)$ 是否 **不可满足（UNSAT）** 来判定两者等价。
- **思政：千变万化的表象与唯一的本质**
  - 同一公式有无数种等值的花哨写法，但主范式只有一条。
  - 识别变幻表象下的**不变本质**，是科学研究的最核心能力。

作业

- **习题二**：2.1；2.2.1 (1)(3)(5)；2.2.2 (2)(4)(6)

预习

- **1-5 命题逻辑的推理理论**
- 思考：如何从上述死板的“等值判定”，走向灵活的“基于已知前提推导结论”?