厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

# 1-5 命题逻辑的推理理论

## 第一章 命题逻辑

张 振

# 引入：什么是正确的推理？



> **直觉判断：**
> 如果天下雨，地就会湿。
> 现在地湿了，所以天一定下雨了。
> ——这个推论正确吗？

- **推理的本质**：从已知的**前提**出发，根据某种**规则**，推导出**结论**的过程。
- **有效推理**：如果前提全部为真，则结论**必然**为真。

**定义 1.5.1**：设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 和 $B$ 是命题公式。称 $B$ 是前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 的**逻辑结论**，当且仅当：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B \text{ 是重言式}$$

**记法**：$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \Rightarrow B$

- **注意**：推理的正确性仅取决于**形式结构**，而不取决于命题的具体内容。

# 二、推理的基本规则（1/2）

掌握以下“原子级”规则是构造复杂证明的基础：

- **分离规则 (MP)**：$(p \to q) \land p \Rightarrow q$
- **拒取规则 (MT)**：$(p \to q) \land \neg q \Rightarrow \neg p$
- **假言三段论 (HS)**：$(p \to q) \land (q \to r) \Rightarrow p \to r$
- **析取三段论 (DS)**：$(p \lor q) \land \neg p \Rightarrow q$

# 二、推理的基本规则（2/2）

- **附加规则：** $p \Rightarrow p \vee q$
- **化简规则：** $p \wedge q \Rightarrow p$
- **合取规则：** $p, q \Rightarrow p \wedge q$
- **构造性间接规则：** $(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$
- **等价引入规则：** $(p \to q) \wedge (q \to p) \Rightarrow p \leftrightarrow q$
- **等效消去规则：** $p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

**1. 直接证明法：**

从前提出发，交替运用推理规则和等值演算法，直到推导出结论。

# 即时练习：直接证明法



练即
习时

**练习：已知前提** $\{p \to q, q \to r, p\}$**，证明结论** $r$。

# 证明解析 (1)

**证明：**

(1) $p \to q$ 前提引入

(2) $p$ 前提引入

(3) $q$ (1)(2) 分离规则 MP

(4) $q \to r$ 前提引入

(5) $r$ (3)(4) 分离规则 MP

$\square$

即时练习

**练习：构造下面推理的证明。**

- **前提：** $p \vee q, p \rightarrow s, q \rightarrow r$
- **结论：** $s \vee r$

# 证明解析 (2)

**证明：**

(1) $p \vee q$ 前提引入

(2) $p \to s$ 前提引入

(3) $q \to r$ 前提引入

(4) $s \vee r$ (1)(2)(3) **构造性间接规则**

$\square$

**2. 附加前提证明法 (CP)：**

若结论形如 $p \to q$，则可将 $p$ 作为**附加前提**放入前提集中，只需推导出 $q$ 即可。

> 原理：$(A \to (p \to q)) \Leftrightarrow (A \wedge p \to q)$

即时练习

**练习：构造下面推理的证明。**

- **前提：** $p \to (q \to r), \neg s \vee p, q$
- **结论：** $s \to r$

# 证明解析



**证明：** 使用 **CP 规则**。

(1) $s$ **附加前提**

(2) $\neg s \vee p$ 前提引入

(3) $p$ (1)(2) 析取三段论 DS

(4) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 前提引入

(5) $q \rightarrow r$ (3)(4) 分离规则 MP

(6) $q$ 前提引入

(7) $r$ (5)(6) 分离规则 MP

(8) $s \rightarrow r$ (1)-(7) CP 规则

$\square$

**3. 等价式证明策略：**

当结论形如 $p \leftrightarrow q$ 时：

- **分步证明法：** 分别证明 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$（通常结合 CP 规则）。
- **同值判定法：** 若能推导出 $p$ 与 $q$ 真值相同，则其等价式成立。

即时练习

**练习：构造下面推理的证明。**

- **前提：** $\neg r \vee s, s \rightarrow q, \neg q$
- **结论：** $q \leftrightarrow r$

**证明：**

(1) $\neg q$ 前提引入
(2) $s \to q$ 前提引入
(3) $\neg s$ (1)(2) 拒取规则 MT
(4) $\neg r \vee s$ 前提引入
(5) $\neg r$ (3)(4) 析取三段论 DS
(6) $\neg q \vee r$ (1) 附加规则
(7) $q \to r$ (6) 等值演算 $(A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B)$
(8) $\neg r \vee q$ (5) 附加规则
(9) $r \to q$ (8) 等值演算
(10) $(q \to r) \wedge (r \to q)$ (7)(9) 合取规则
(11) $q \leftrightarrow r$ (10) 等价引入规则

□

**核心思想：**

- 为了证明前提集 $H$ 推导出结论 $C$，我们先假设结论 $C$ 的**否定** $\neg C$ 成立。
- 如果在 $H \cup \{\neg C\}$ 的基础上能推导出**矛盾**（形如 $D \wedge \neg D$ 或 $\mathbf{F}$），则说明原假设错误。
- **结论**：结论 $C$ 必然成立。

**逻辑依据：**

$$(H \wedge \neg C \to \mathbf{F}) \Leftrightarrow (H \to C)$$

# 归谬法：逻辑步骤

- **步骤 1**：将结论的否定 $\neg C$ 加入前提集（称为“反证前提”）。
- **步骤 2**：从新前提集出发进行逻辑推演。
- **步骤 3**：寻找推演出的两个相互矛盾的命题 $D$ 与 $\neg D$。
- **步骤 4**：由于矛盾式的存在（值为 $\mathbf{F}$），反推原假设 $\neg C$ 为假。

**练习：已知前提** $\{p \to r, q \to r, p \vee q\}$**，利用归谬法证明结论** $r$**。**

**证明：**

(1) $\neg r$ **反证前提**（结论的否定）

(2) $p \rightarrow r$ 前提引入

(3) $\neg p$ (1)(2) 拒取规则 MT

(4) $q \rightarrow r$ 前提引入

(5) $\neg q$ (1)(4) 拒取规则 MT

(6) $\neg p \wedge \neg q$ (3)(5) 合取规则

(7) $\neg(p \vee q)$ (6) 德摩根律

(8) $p \vee q$ 前提引入

(9) $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q) \Rightarrow \mathbf{F}$ (7)(8) 产生矛盾

$\square$

即时练习

**逻辑谜题：某珠宝店失窃，甲、乙、丙三人涉嫌。经调查：**

**1. 若甲参与，则乙也参与。**
**2. 乙、丙中至少有一人参与，但甲未参与。**
**3. 丙未参与。**
**请问：谁是盗窃者?**

# 案例解析：形式化建模

**命题符号化：** $p, q, r$ 分别表示甲、乙、丙参与。

**已知前提：**

（1）$p \to q$

（2）$(q \vee r) \wedge \neg p$

（3）$\neg r$

**证明过程：**

（4）$\neg p$ 由（2）化简得

（5）$q \vee r$ 由（2）化简得

（6）$q$ 由（3)(5）析取三段论得

**结论：** 乙是盗窃者。

# AI 结合与思政：逻辑的力量

- **AI 互动**：利用 Doubao 或 Deepseek 提出逻辑谜题，观察其推导过程。
- **思政小结**：
  - **因果辩证**：明白今天的努力是为了明天的收获（因果推导）。
  - **法治意识**：逻辑推演必须基于确凿证据，增强法治观念。

# 作业

- **习题二：** 2.9 (1)(2)(4)；2.10 (2)(4)；2.11；2.12

# 下节预习

- **第二章：谓词逻辑**
- 思考：如何表达“所有人都是要死的”？