厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

2-2 合式公式与解释

第二章 一阶逻辑：从语法到语义

张 振

逻辑的两个维度

在前一节，我们将苏格拉底三段论中的“前提一：所有人都要死”符号化为：

$$\forall x(M(x) \to D(x))$$

- **语法 (Syntax)**：这个字符串的组合方式是否正确？（**合式公式 WFF**）
- **语义 (Semantics)**：它代表什么？它是真是假？（**解释 Interpretation**）

核心递归定义

- **原子公式**：由谓词填入个体词构成，如 $P(x_1, \ldots, x_n)$。
- **复合操作**：若 A, B 是公式，则 $\neg A$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$ 也是公式。
- **量化操作**：若 A 是公式，则 $\forall x A$、$\exists x A$ 也是公式。
- **有限性**：只有通过上述规则有限次生成的才是**合式公式**。

即时练习

练习：判断下列字符串是否为合式公式 (WFF)。

1. $P(x) \vee Q(y) \wedge \neg$
2. $\forall x(\exists y(P(x) \to Q(y)))$
3. $(\forall x P(x)) \wedge y$

参考答案：

- **1. 否**：连结词 $\neg$ 后缺少公式，语法不完整。
- **2. 是**：量词可以嵌套，且所有谓词均构成了原子公式。
- **3. 否**：y 是个体词，不能独立作为公式与量化式进行逻辑联结（**只有公式能联结**）。

1. 结构与优先级

- **指导变元 (Guiding Variable)**：紧跟量词之后的变元。如 $\forall \underline{x}$。
- **算子优先级**：$\forall, \exists$ 的优先级**最高**，高于所有五大逻辑联结词。
- **辖域 (Scope)**：量词的作用区域。
  - **判定规则**：量词后若紧跟括号，辖域为括号内；否则仅为紧随其后的原子公式。

2. 变元状态分析 (Variable Status)

- **约束变元 (Bound)**：在辖域内出现的与指导变元同名的变元。
- **自由变元 (Free)**：公式中非约束出现的变元。
- **重要结论**：同一个变元名在同一公式中可以同时具有约束与自由两种状态。
- **特殊定义：闭式 (Closed Formula)**
  - 若公式 G 中**不含任何自由变元**，则称 G 为**闭式**（也称**句子** Sentence）。
  - *直觉理解：闭式是一个语义自洽、结构完整的完整判断。*

即时练习

练习：判定并指出下列公式中 x 的状态：

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$
2. $\forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y)$
3. $\forall x \exists y(P(x) \wedge Q(y, z))$

参考答案：

- **1. 辖域：** $(P(x) \to Q(x))$。
  - 前两个 x 为**约束变元**；最后的 $R(x)$ 为**自由变元**。
- **2. 状态判定：**
  - 第一个 x 受 $\forall x$ 约束；第二个 x 是**自由变元**（量词辖域不跨越 $\to$）。
- **3. 嵌套分析：**
  - x, y 均为**约束变元**；z 是**自由变元**。
- **重要法则：** 括号决定边界，重名由内而外。

即时练习

练习：判定公式 $G: \exists x(P(x) \to \forall x Q(x))$ 中各变元的状态。

1. 指出每个 x 被哪个量词约束。
2. 讨论这种嵌套是否合法。

分析与法则：

- $P(x)$ **中的** x： 受 $\exists x$ 约束。
- $Q(x)$ **中的** x： 受其内部紧邻的 $\forall x$ 约束，**屏蔽**了外部的 $\exists x$。
- **核心法则**： 内部量词会**屏蔽**外部同名量词（类似局部变量屏蔽全局变量）。

重点对比：量词分配律失效

在正整数集 D 上，设 $O(x):x$ 是奇数；$E(x):x$ 是偶数。

1. **命题 G1**：$\forall x(O(x) \vee E(x))$
   - **含义**：每一个数要么是奇数，要么是偶数。其真值为 T。
2. **命题 G2**：$\forall x O(x) \vee \forall x E(x)$
   - **含义**：所有数都是奇数，或者所有数都是偶数。其真值为 F。

- **结论**：全称量词对 $\vee$ **无分配律**，辖域的细微差别会导致真值从 T 降级为 F。

1. 复杂论域下的多重限制

- **案例**：每一位**爱学习**的**大学生**都**尊敬老师**。
- **变量定义**：$S(x)$：x 是大学生；$L(x)$：x 爱学习；$R(x)$：x 尊敬老师。
- **逻辑结构**：全称量词限定了对象的多重属性。
  - **正确表达**：$\forall x((S(x) \land L(x)) \to R(x))$
- **易错警示**：若不加外部大括号，$\forall x$ 的辖域将仅限于 $S(x)$，导致符号化失败。

2. 多量词嵌套与语序敏感性

- **命题 A**：每个人都有一个朋友。
  - $\forall x \exists y F(x, y)$（每个人 x 找对应的朋友 y）。
- **命题 B**：有一个人是所有人的朋友。
  - $\exists y \forall x F(x, y)$（先确定某位“社交核心” y，他是所有 x 的朋友）。
- **对比结论**：量词的**次序**（即辖域的嵌套关系）决定了命题的本质语义。

3. 高阶数学命题：素数的无限性

- **自然语言**：对任意一个正整数，总存在一个比它更大的素数。
- **变量定义**：$P(x) : x$ 是素数；$G(x, y) : x > y$。
- **一阶符号化**：$\forall x \exists y(G(y, x) \wedge P(y))$
- **深度思考**：由于素数无限性是数学真理，该公式在数论系统的解释 I 下真值为 T。

4. 经典案例：天下乌鸦一般黑

- **谓词定义：**
  - $F(x)$：x 是乌鸦； $G(x,y)$：x 与 y **一般黑**。
- **逻辑表达（全称肯定）：**
  - $\forall x \forall y((F(x) \wedge F(y)) \to G(x,y))$
  - *直译：对于任意对象 x,y，若它们都是乌鸦，则它们一样黑。*
- **另一种表达（存在否定）：**
  - $\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y))$
  - *直译：不存在两个对象，它们既是乌鸦、但又不一样黑。*

核心定义：解释 (Interpretation)

按照教科书定义，解释 $I = \langle D, \Psi, \Phi, \mathcal{C} \rangle$ 由以下四部分组成：

- **(1) 非空个体域** D：指定一个基础集合。
- **(2) 指定常数项符号**：为每个个体常项指定 D 中的一个元素。
- **(3) 指定函数符号**：为每个函数变项指定 D 上的映射。
- **(4) 指定谓词符号**：为每个谓词符号指定 D 上的逻辑关系。
- **本质**：解释 I 定义了公式中所有“名字”和“谓词”的**具体含义**及所处的世界。

变项赋值 v：公式的运行时状态

若公式中含有非被量化管辖的变元（自由变元），仅靠解释 I 无法直接得出真值，还需补充：

- **定义**：为公式中出现的每个**自由变元**指定 D 中的一个元素。我们将这个映射记为 v。
- **演算逻辑**：公式的最终真假是由 **(解释 I + 赋值 v)** 共同决定的。

深度直觉：解释 I 与 赋值 v 的分工

设公式 $G : P(x, c)$

- **解释 I (演算底座)**：
  - $D = \mathbb{Z}^+$ (正整数)； $P(x, y)$ 为 $x > y$； 常数 c 指向 10。
  - **角色**：规定了“什么是大于”以及“标签 c 指向谁”。
- **赋值 v (动态指针)**：
  - $v(x) = 5$（指定变量 x 当前指向数字 5）。
  - **角色**：选定了当前的“**观测样本**”。
- **结论**：在 (I, v) 协作下，G 意为 $5 > 10$，真值为 F。

1. 解释 I 的设定

- 个体域 D：正整数集 $\{1,2,3,\ldots\}$。
- 谓词含义：
  - $O(x)$: x 是奇数；$E(x)$: x 是偶数；$P(x)$: x 是素数。
  - $G(x,y)$: $x>y$；$Q(x,y)$: $x=y$。

2. 典型公式真值判定练习

- $\forall x O(x)$ —— F (并非全体奇数)
- $\exists x E(x)$ —— T (如 2 是偶数)
- $\exists x (E(x) \wedge P(x))$ —— T (即 2)
- $\forall x \exists y G(y,x)$ —— T (任意正整数，总能找到更大的数)

案例公式：$(\exists x)P(f(x),2)$

同一个公式，在不同的**解释**下，表现出完全不同的“灵魂”(真值)。

解释 I_1：为什么命题为假?

1. **个体域** D：正整数集 $\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,\dots\}$。
2. **常元映射**：符号 2 映射为整数 2。
3. **函数映射**：$f(x)=4x$。
4. **谓词映射**：$P(x,y)$ 表示 $x<y$。

- **演算过程**：

$$\exists x\in\mathbb{Z}^+(4x<2)$$

- **结论**：由于正整数最小为 1，$4x\geq 4$，不满足 $4x<2$。故 I_1 下为 F。

解释 I_2：只需微调函数或谓词定义

- **保持其余不变**，仅修改函数映射为：$f(x) = x$。
- **演算过程**：

$$\exists x \in \mathbb{Z}^+(x < 2)$$

- **结论**：取 $x = 1$，满足 $1 < 2$。故 I_2 下为 T。

即时练习

核心总结：解释由 $\langle D, 谓词, 函数, 常元\rangle$ 四要素构成，任何一环的变动都会重构整个公式的真值属性。

案例对比：改变论域 D 对真值的影响

设公式 $G: \forall x \forall y (G(x,y) \to \exists z (G(x,z) \land G(z,y)))$

1. **解释 I_1：**
   - **论域** $D = \mathbb{Z}^+$ (正整数集)；谓词 $G(x,y)$ 为 $x < y$。
   - **真值结果：** F。例如取 $x = 1, y = 2$，不存在整数 z 介于两者之间（离散性）。
2. **解释 I_2：**
   - **论域** $D = \mathbb{R}$ (实数集)；谓词 $G(x,y)$ 为 $x < y$。
   - **真值结果：** T。对于任意两个不等实数，总能找到中间值（稠密性）。

- **结论：** 公式的语义并不是由符号本身决定的，而是由解释赋予的“世界观”决定的。

1. 一阶逻辑公式的三大类别：

- **永真式 (Valid)**：**在所有可能**解释下均为真。
  - 如：$\forall x P(x) \lor \neg \forall x P(x)$。
- **永假式 (Contradictory)**：在所有解释下均为假。
- **可满足式 (Satisfiable)**：至少存在一个解释使其为真。
- **注**：判定永真性比命题逻辑难得多，因为“解释”的种类是无穷的。

五、即时练习：分类判定

即时

练习：判定公式 $\exists x P(x) \land \neg P(y)$ 的分类。

参考答案：

该公式是**可满足式**。

- **证明方法**：
  - **1. 证明可满足**：设定 $D = \{1, 2\}$, $P(1) = T, y = 2, P(2) = F$。此时式为 $T \wedge \neg F = T$。
  - **2. 证明非永真**：设定 $P(x)$ 恒为假。
- **结论**：它的真假取决于解释 (Interpretation)。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

核心定义与定理

- **代换实例 (Substitution Instance)**：设 A 是命题逻辑公式。将其原子命题 p_n 用一阶逻辑公式 G_n 代换所得公式 G。
- **核心定理**：
  - 若 A 是**重言式** (Tautology)，其代换实例 G 必为一阶逻辑中的**永真式** (Valid)。
  - 若 A 是**矛盾式**，其代换实例必为**永假式**。

2. 判定捷径

- 看到形如 $G \vee \neg G$ 或 $G \to G$ 的公式，无需复杂的解释分析，直接判定为永真式。

即时练习

练习：判断下列公式是否为重言式的代换实例？若是，其类型是什么？

1. $\forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x)$
2. $(\exists x P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge Q(y))$
3. $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

参考答案：

1. **是**。宏观结构为 $p \vee \neg p$，是重言式代换实例 $\Rightarrow$ **永真式**。
2. **是**。宏观结构为 $p \to p$，是重言式代换实例 $\Rightarrow$ **永真式**。
3. **否**（注意！）。量词 $\forall x$ 在最外层，其母式 $P(x) \vee \neg P(x)$ 是重言式实例，但整体**不是**命题逻辑公式的直接代换（命题逻辑不含 $\forall$）。虽它也是永真式，但不属于代换实例定义的范畴。

核心性质：闭式 (Closed Formula)

对比 4 要素解释 $I = \langle D, \Psi, \Phi, \mathcal{C} \rangle$：

公式类型	语义依赖 (Truth Determination)	属性
开式 (Open)	I (环境) + v (赋值/指针)	真值随变量赋值改变
闭式 (Closed)	仅由 I (环境) 决定	对赋值 v **强免疫**

- **结论**：闭式是一个**事实陈述**，其真值由解释 I 唯一确定。

衔接与下节预告

- **等值判定**：若 G, H 在所有解释下真值同步，记作 $G \Leftrightarrow H$。
  - **【核心定理】**：$G \Leftrightarrow H$ **当且仅当** $G \leftrightarrow H$ **为一阶逻辑的永真式。**
- **终极武器**：由于解释种类（论域）无穷无尽，我们必须跳出语义，利用“**等值演算**”规则像代数一样进行纯符号变换。

1. AI 融合：自动化推理引擎

- **逻辑编程 (Prolog)**：一阶逻辑是人工智能早期“逻辑主义”学派的核心。
- **专家系统**：通过“解释”模拟领域知识。

2. 思政微课：真理的视角

- 解释决定语义：引导学生明白“事实”与“视角”的关系。同样的逻辑结构，在不同的背景（域）下结论可能完全不同，培养多维度分析问题的能力。

本节重点：

- **语法**：熟练判定合式公式（WFF）。
- **语义**：掌握“解释”的四要素及真值计算。
- **难点**：自由变元与约束变元的区分。

课后作业：

- **习题集**：4.10，4.11。
- **预习**：一阶逻辑等值演算。