厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

2-3 一阶逻辑等值演算与前束范式

第二章 一阶逻辑：从语法到语义

张 振

目录

第一节

引入：苏格拉底的逻辑困惑

表达的多样性

考虑陈述：**“并非所有人都要死”**。

- **直译版本**：
$$\neg\forall x(M(x) \to D(x))$$
- **意译版本**（存在一些人是不死的）：
$$\exists x(M(x) \land \neg D(x))$$

核心挑战：
在一阶逻辑面对复杂嵌套公式时，如何通过**等值演算**，在严密的数学层面上证明二者的**同一性**？

第二节

演算底座：三大运算规则

规则概要：演算的三大“手术刀”

1. **置换规则 (Replacement)**
    - **作用**：局部等值替换子公式。
    - **要点**：仅替换匹配的部分，不影响其余骨架。
2. **代替规则 (Substitution)**
    - **作用**：命题等值律的一阶复用。
    - **要点**：必须对同一变元的所有出现进行**统一替换**。
3. **换名规则 (Renaming)**
    - **作用**：消除变元命名冲突。
    - **要点**：新名不能在辖域内自由出现。

- **定义**：若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$
- **用法**：对公式的任意子部分进行等值替换，其他部分保持原封不动
- **例**：考虑复合公式 $G: \forall x P(x) \vee \exists \mathbf{y}(\mathbf{Q}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{y}))$
  对右侧子公式应用等值式 $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$，得：
  $\forall x P(x) \vee \exists \mathbf{y}(\neg \mathbf{Q}(\mathbf{y}) \vee \mathbf{R}(\mathbf{y}))$
- **本质**：逻辑上的“局部手术”，只改动病灶区域（子公式），不影响身体骨架

- **定义**：命题逻辑中的**重言式**，其命题变元统一替换为一阶公式后仍为永真式；
  命题逻辑中的**矛盾式**，统一替换后仍为永假式。
- **要求**：必须对同一命题变元的**所有出现**进行**统一替换**
- **例**：命题逻辑重言式 $P \to P$，将 P 统一替换为 $\forall x F(x)$，得一阶永真式：

$$\forall x F(x) \to \forall x F(x)$$

- 再如：将重言式 $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ 中的 P, Q 分别替换为 $\exists x G(x), \forall y H(y)$，得：

$$(\exists x G(x) \to \forall y H(y)) \Leftrightarrow (\neg \exists x G(x) \vee \forall y H(y))$$

- **本质**：命题规则是通用骨架，可套用到任意一阶公式

- **作用**：解决约束变元同名冲突，是前束范式化的前置步骤
- **法则**：$\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall y A(y)$，需满足：

  1. 新名 y 未在 $A(x)$ 中自由出现

  2. 对量词辖域内的该变元**所有约束出现**统一替换
- **例**：$\forall x P(x) \lor \exists x Q(x) \xlongequal{\text{第二个}x\text{换为}y} \forall x P(x) \lor \exists y Q(y)$
- **本质**：约束变元是占位符，类似积分变量，换名不改变语义

第三节

常用等值律：围绕量词的行为学

掌控量词的“物理特性”

在进行具体计算前，必须掌握量词在不同场景下的行为：

1. **消去量词**：有限论域下的命题化。
2. **量词否定**：处理否定号 ¬ 的穿透。
3. **辖域收缩/扩张**：控制量词管辖范围。
4. **量词分配**：处理量词对联结词的分合。
5. **量词交换**：确定量词的先后语序。

从无限退回有限

若论域 D 为**有限集** $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，量词可完全展开：

- **全称展开 (合取 $\wedge$)**：
  $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_m)$
- **存在展开 (析取 $\vee$)**：
  $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_m)$

直觉本质：全称量词是**连乘**；存在量词是**连加**。这解释了为何量词也具备"德·摩根"特性。

全称与存在的“对偶”性

当否定号 $\neg$ 穿过量词时，量词必须 “**翻转**”：

- **全称否定转存在：**
  $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$
- **存在否定转全称：**
  $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$

直观理解：

- “并非所有人都是仙” $\Leftrightarrow$ “存在不仙的人”。
- “不存在会飞的人” $\Leftrightarrow$ “人人都不会飞”。

即时练习

任务：对引例公式 $G:\neg\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$ 进行等值变换。

目标：将否定号 $\neg$ 移动到谓词公式的最内层。

变换步骤：

1. **量词翻转**：
$$\neg\forall x(M(x) \to D(x)) \Leftrightarrow \exists x\neg(M(x) \to D(x))$$

2. **置换规则** (利用 $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \land \neg Q$)：
$$\exists x(M(x) \land \neg D(x))$$

验证：数学层面证明了“并非所有人都要死” $\Leftrightarrow$ “有人是不死的”。

3.1 性质保持：$\forall, \exists$ 与 $\land, \lor$

若 x **不出现**在公式 B 中：

- $\forall x(A(x) \lor B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \lor B$
- $\forall x(A(x) \land B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land B$
- $\exists x(A(x) \lor B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor B$
- $\exists x(A(x) \land B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \land B$

3.2 特殊规则：蕴含号 (→)

当 x **不出现**在 B 中时：

- **当前件带量词时：**

$$\forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B$$

$$\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \to B$$

- **当后件带量词时：**

$$\forall x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \forall x A(x)$$

$$\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists x A(x)$$

实战口诀：“前变后不变”。量词从箭头**前件**提取时，性质对调；从**后件**提取时，性质保持。

即时练习

任务：判定公式 $\exists x(P(x) \to Q)$ 的等值形态（假设 Q 中不含 x）。

提示：先消去蕴含箭头，再观察 Q 与量词的关系。

变换过程：

1. **消去蕴含：** $\exists x(\neg P(x) \vee Q)$
2. **利用扩张律：** 由于 Q 与 x 无关，外提量词得到 $(\exists x \neg P(x)) \vee Q$。
3. **逆向还原：** $\neg \forall x P(x) \vee Q \Leftrightarrow \forall x P(x) \rightarrow Q$。

结论： 验证了“前变”口诀，存在量词 $\exists$ 在前件时由于消去箭头带来的否定而变为了 $\forall$。

强分配（恒等值 $\Leftrightarrow$）

- **合取对全称：**
  $\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land \forall x B(x)$
- **析取对存在：**
  $\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$

直觉： “每个人都是 A 且每个人都是 B” 等价于 “每个人都是 A 且每个人都是 B”。

1. 概念分层

- **联结词** ($\to$, $\leftrightarrow$)：公式组件。
- **元关系** ($\Longrightarrow$, $\Leftrightarrow$)：逻辑判定，代表永真性。
  - $A \Leftrightarrow B \iff \models A \leftrightarrow B$

2. 分配“陷阱”：单向蕴涵

1. **析取对全称：** $\forall x A \vee \forall x B \implies \forall x(A \vee B)$
   - **反例：** A : 男, B : 女。人人皆男或女 (T) $\nrightarrow$ 均为男或均为女 (F)。
2. **合取对存在：** $\exists x(A \wedge B) \implies \exists x A \wedge \exists x B$
   - **反例：** $A : x = 1, B : x = 2$。有人是1且有人是2 (T) $\nrightarrow$ 既是1又是2 (F)。

场景	$L \to R$ 永真?	$R \to L$ 永真?	结论
$\forall / \wedge$	是	是	等值 $(\Leftrightarrow)$
$\exists / \vee$	是	是	等值 $(\Leftrightarrow)$
$\forall / \vee$	否	是	蕴涵 $(\Leftarrow)$
$\exists / \wedge$	是	否	蕴涵 $(\Rightarrow)$

底层逻辑：

- **亲和（无损）**：性质一致 $(\forall / \wedge, \exists / \vee) \Leftrightarrow$ **强分配**。
- **排斥（向弱）**：性质冲突时产生单向约束差异 $\to$ **单向蕴涵**。

设论域 $D = \{1, 2\}$，通过展开对比证明蕴涵关系。

- **前件展开 (LHS)**：$\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
  $\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge B_2)$
  $\Leftrightarrow (A_1 \vee B_1) \wedge (\mathbf{A_1} \vee \mathbf{B_2}) \wedge (\mathbf{A_2} \vee \mathbf{B_1}) \wedge (A_2 \vee B_2)$
- **后件展开 (RHS)**：$\forall x (A(x) \vee B(x))$
  $\Leftrightarrow (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$

场景	逻辑特征	是否可换?	结论
同种量词	类别相同 (∀∀ 或 ∃∃)	**是**	$\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$ $\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A$
存在依赖	变元耦合，如 $A(x, y)$	**否**	$\forall x \exists y A(x, y) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x A(x, y)$
相互独立	变元跨越不相关子式	**是**	$\forall x \exists y (\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \exists y \forall x (\Phi \vee \Psi)$

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

语义辨析：

0. **平权型**（可换）：$\forall x \forall y A$ 或 $\exists x \exists y A$ —— 相同量词地位平权，次序无关。

1. **耦合型**（不可换）：$\forall x \exists y L(x, y)$ —— 人人都有崇拜的对象（y 随 x 变）。

2. **独立型**（可换）：$\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$ —— 提取自独立子式，语序不影响变量绑定。

第四节

核心目标：前束范式（PNF）

标准化结构

一阶公式 G 称为前束范式，如果它具有如下形式：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)M$$

- **前缀 (Prefix)**：所有量词整齐排在最前方，且指导变元互不相同。
- **母式 (Matrix)**：不含任何量词。

意义：将逻辑的核心结构（量词）与具体逻辑运算（母式）**彻底解耦**，是自动推理的基础。

典型例题 1

题目： 将公式 $\neg\forall x F(x) \wedge \neg\exists x G(x)$ 转换为前束范式。

即时练习

提示：需注意前缀中包含否定号时的预处理，以及合取/析取算子下变元冲突的判定。

典型例题 1：推导过程

1. $\exists x \neg F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$ —— **量词否定定律**
2. $\exists x \neg F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$ —— **换名规则** (保留前一个 x，仅改后项)
3. $\exists x \forall y (\neg F(x) \wedge \neg G(y))$ —— **量词合取/析取扩张律**

典型例题 2

题目： 将公式 $\exists x F(x) \to \exists x G(x)$ 转换为前束范式。

时练习即

提示：直接利用蕴含项下的量词扩张律进行外提，注意提取位置（前侧 vs 后侧）对量词性质的影响。

典型例题 2：推导过程

1. $\exists x F(x) \to \exists y G(y)$ —— **换名规则** (只改冲突项)
2. $\forall x(F(x) \to \exists y G(y))$ —— **量词蕴含扩张律** (前件 $\exists \to$ 外提翻转为 $\forall$)
3. $\forall x \exists y(F(x) \to G(y))$ —— **量词蕴含扩张律** (后件 $\exists \to$ 外提保持性质)

深度辨析：
由于 $F(x)$ 与 $G(y)$ 的变元相互独立，根据“独立型交换”准则，本题结果亦可等值写作 $\exists y \forall x(F(x) \to G(y))$。

即时练习

任务：将公式 $(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)) \to \forall x R(x)$ 转换为前束范式。

关键点：

1. 彻底换名：发现 x 全冲突后优先执行。
2. 直接外提：利用“前变后不变”定律跨越箭头提取。
3. 性质翻转：注意前件（左侧）量词提取时需变号。

变换全过程：

1. **换名规则**： $(\forall u P(u) \vee \exists v Q(v)) \to \forall x R(x)$
2. **提取后件**： $\forall x[(\forall u P(u) \vee \exists v Q(v)) \to R(x)]$
3. **提取前件** $\forall u$： $\exists u \forall x[(P(u) \vee \exists v Q(v)) \to R(x)]$
4. **提取前件** $\exists v$： $\exists u \forall v \forall x[(P(u) \vee Q(v)) \to R(x)]$

启发：通过这 4 步流程，量词被有序“驱赶”到前排。虽然消去箭头也能做，但“直接外提”路径保留了逻辑骨架，过程更短且可读性更高。

习 即时练

任务：将下列公式转换为与之等值的前束范式。
注意：部分题目存在约束变元同名冲突，需先执行“换名规则”。

1. $\forall x F(x) \vee \neg \forall x G(x)$
2. $\neg \exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$
3. $(\exists x F(x, y) \rightarrow \forall y G(y)) \rightarrow \exists x H(x, y)$

逻辑解析：

1. $\forall x F(x) \vee \neg \forall x G(x) \Leftrightarrow \forall x \exists y(F(x) \vee \neg G(y))$
   - **点拨**：保留前项 x，将后项约束变元换名为 y。
2. $\neg \exists x F(x) \to \forall x G(x) \Leftrightarrow \exists x \forall y(\neg F(x) \to G(y))$
   - **点拨**：保留前项 x (翻转后)，将后项约束变元换名为 y。
3. $(\exists x F(x,y) \to \forall y G(y)) \to \exists x H(x,y)$
   $\Rightarrow \exists z \exists v \exists x((F(z,y) \to G(v)) \to H(x,y))$
   - **点拨**：自由变元 y 保持不动。对三个约束变元冲突项分别换名（保留最外侧的 x）。

本节复习要点：

- **量词四律**：否定律、扩张律、分配律、交换律。
- **换名规则**：量词外提、前束范式化的前提。
- **PNF 标准格式**：前缀 + 母式。

课后练习：

- 习题 4.15, 4.16。
- 思考：如果公式已经是前束范式，后续的自动化证明逻辑会如何展开？