



廈門大學嘉庚學院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

## 2-4 一阶逻辑形式推理理论

第二章 一阶逻辑：逻辑证明的终极判决

张振

# 目录

---

第一节

: 引言：证明苏格拉底会死

第二节

: 全称量词的推理规则

第三节

: 存在量词的推理规则

第四节

: 形式推理实战

# 第一节

---

引言：证明苏格拉底会死

## 回顾：经典三段论

我们要通过数学严密性推导以下结论：

- **前提 1 (大前提):**  $\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$  —— 凡人皆有死。
- **前提 2 (小前提):**  $M(s)$  —— 苏格拉底是人。
- **结论:**  $D(s)$  —— 苏格拉底有死。

**技术瓶颈：**

命题逻辑的推理规则不足以处理量词。我们需要一套“剥开量词外壳”的方法，即一阶逻辑的四种量词指定与推广规则。

# 第二节

---

## 全称量词的推理规则

### I 1. 全称指定规则 (Universal Specification, US)

- 形式:  $\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$
- 内核: 如果全体都对, 那么特定的客体  $c$  也对。
- 限制: 代换  $c$  时, 不能使  $c$  落在该处原有变元的辖域内 (变元冲突)。

### I 2. 全称推广规则 (Universal Generalization, UG)

- 形式:  $A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$
- 内核: 若  $A$  对任意选取的客体 (自由变元  $x$ ) 均成立, 则全称命题成立。



**任务：判断下列推理序列中 US 规则的使用是否合法？**

1. 前提： $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. 导出项 1： $P(s) \rightarrow Q(s)$
3. 导出项 2： $P(y) \rightarrow Q(y)$

“

### ■ 参考答案：

1. 合法。将约束变元  $x$  替换为特定的常项  $s$ 。
2. 合法。将约束变元  $x$  替换为自由变元  $y$ （此时  $y$  代表任意客体）。

### 深度理解：

US 规则是三段论推理的“开锁钥匙”，它实现了从“普适规律”到“具体对象”的跨越。

# 第三节

---

存在量词的推理规则

## 1. 存在指定规则 (Existential Specification, IS)

- 形式:  $\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$
- 硬性限制:  $c$  必须是一个从未在该证明序列出现过的临时符号。
- 直觉: 它代表那个“确定存在但身份不明”的个体 (如“某人”)。

## 2. 存在推广规则 (Existential Generalization, EG)

- 形式:  $A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$
- 直觉: 只要抓到一个典型, 命题“存在性”即得证。



**任务：指出下列推理错在哪里？**

1.  $\exists x P(x)$  (前提：论域中有奇数)
2.  $P(a)$  (IS：设  $a$  是那个奇数)
3.  $\exists x Q(x)$  (前提：论域中有偶数)
4.  $Q(a)$  (IS：由于有偶数，所以  $a$  也是偶数！)



## 错误分析：

- 致命伤：第 4 步错误地复用了常项  $a$ 。
- 法则：在同一证明链中，IS 指定的临时符号必须是全新的。
- 纠正：第 4 步应设为  $Q(b)$ 。因为并没有根据能证明“那个奇数”和“那个偶数”是同一个对象。

“ [经验笔记]：这就是为什么要“先消存在，后消全称”。

# 第四节

形式推理实战

## ■ 规范证明序列：

- 已知：(1)  $\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$ ；(2)  $M(s)$
- 求证： $D(s)$

步骤	公式	依据
(1)	$\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$	前提引入 (P)
(2)	$M(s) \rightarrow D(s)$	US (1)
(3)	$M(s)$	前提引入 (P)
(4)	$D(s)$	假言推理 (2)(3), T



**任务：证明下列推理的有效性：**

- **前提：**  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x)$
- **结论：**  $\exists x Q(x)$

“

## 证明过程 (注意规则顺序):

1.  $\exists x P(x) \text{ — (P)}$
2.  $P(a) \text{ — (1), IS (先处理存在)}$
3.  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \text{ — (P)}$
4.  $P(a) \rightarrow Q(a) \text{ — (3), US (根据已出现的 } a \text{ 进行对齐)}$
5.  $Q(a) \text{ — (2)(4), T (假言推理)}$
6.  $\exists x Q(x) \text{ — (5), EG}$

**核心技巧:** 为了让常项匹配, 必须优先使用 IS 产生新常项, 再让 US “配合” 该常项。

## 逻辑、法律与 AI 的交汇

- **归结原理**：计算机通过消去量词并进行文字匹配（Unification），自动发现证明路径。
- **Prolog 语言**：每一行代码本质上都是一个一阶逻辑子句，推理引擎即是它的执行器。

### 思政微课：法治的严谨性

法律判定必须有完整的**证据链**与**法条引用**，正如同逻辑证明必须每一步标注依据。这种严密的符号化推导，构成了现代文明理性的底色。

在现代 C++ 标准库 ( `<algorithm>` ) 中，量词已具象化为高阶函数：

- 全称 ( $\forall$ )  $\leftrightarrow$  `std::all_of` ; 存在 ( $\exists$ )  $\leftrightarrow$  `std::any_of`

```
#include <algorithm>
#include <vector>

// 定义谓词与论域
std::vector<Person> domain = {socrates, plato, aristotle};
auto IsHuman = [](auto p) { return p.is_human; };
auto IsMortal = [](auto p) { return p.is_mortal; };

// 验证推导逻辑：凡人皆有死  $\forall x(\text{Human}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x))$ 
bool allMortal = std::all_of(domain.begin(), domain.end(), [](auto p) {
    return !IsHuman(p) || IsMortal(p); // 逻辑蕴含  $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ 
});
```

## | 本节重点：

- 四大关键规则：US, UG, IS, EG。
- 先消存在的优先级：确保常项匹配的工程策略。
- 证明规范：公式与依据的三位一体表达。

## | 全章作业：

- 习题四：4.14, 4.15。
- 终极思考：如果证明序列出现了闭环，该如何打破？