离散数学期末复习讲义(学生版)

三大篇章·考点编号·典型题型

MatNoble

目录

1 复习定位

本轮离散数学期末复习按三大篇章组织:

逻辑篇　　集合与二元关系篇　　图论篇.

下面的考点以样卷中已经出现的题型为主, 并结合已明确的出题信息补充关系图、关系矩阵等可能考查形式。课件内容只作为同一考点下的辅助说明, 不单独扩展为新的主考点。

篇章	**核心考点**	**重点方法**
逻辑篇	命题符号化、命题判断、主范式、量词辖域、前束范式、推理证明	翻译、真值表、等值演算、约束变元改名、推理规则
集合与二元关系篇	幂集、关系个数、关系图与关系矩阵、关系复合、偏序矩阵与哈斯图	子集计数、矩阵互化、布尔乘法、覆盖关系
图论篇	度数、道路、完全图生成子图、邻接矩阵回路、Dijkstra、关键路径	握手定理、矩阵幂、非同构判别、标号法、AOE 正推逆推

2 逻辑篇

考点 L1：命题符号化与命题判断

相关知识点

1. 命题是能够判断真假的陈述句；疑问句、祈使句、感叹句和主观评价通常不是命题。
2. 命题符号化要先定义基本命题，如 A、B，再用 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 连接。
3. “不是……不……”常对应双重否定；例如“不是 A 不成立”可写为 $\neg(\neg A)$。
4. 常见中文联结词对照：

符号	常见中文表达
$\neg$	不、并非、不是、没有
$\wedge$	且、并且、而且、但是、而是、同时
$\vee$	或、或者、至少一个、二者之一或二者都
$\rightarrow$	若……则……、如果……那么……、只要……就……
$\leftrightarrow$	当且仅当、等价于、充要条件

5. 蕴含方向要特别注意：“P 是 Q 的充分条件”写作 $P \rightarrow Q$；“P 是 Q 的必要条件”写作 $Q \rightarrow P$。

例题 1：判断“你笑起来真好看。”是否为命题。

例题 2：设 P：下雨；Q：地面湿。将“只要下雨，地面就湿”符号化。

例题 3：设 A：羽绒服买得起；B：大衣更有性价比。将“不是羽绒服买不起，而是大衣更有性价比”符号化。

易错提醒

自然语言中的“不是……不……”容易漏掉双重否定；“或者”要结合题意判断是否按相容析取 $\vee$ 处理。

考点 L2：主析取范式、主合取范式与成真/成假赋值

相关知识点

1. 真值表

$$n\text{ 个命题变元} \quad \Longrightarrow \quad 2^n\text{ 行赋值.}$$

真值表结果	公式类型
全为真	重言式
全为假	矛盾式
有真有假	可满足式

2. 主范式

对象	形式	来源
小项m_i	全部变元各出现一次的合取式	成真赋值
大项M_i	全部变元各出现一次的析取式	成假赋值
主析取范式	$m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots$	成真行
主合取范式	$M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots$	成假行

3. 编号规则

变元顺序	p, q, r
赋值	$pqr = 101$
编号	5

按变元顺序读二进制得到下标。

注意：普通范式不一定是主范式；主范式要求每一项都含全部变元。

例题 1：设 $B = p \wedge \neg q$，判断它是否既是合取范式也是析取范式。

例题 2：用真值表判断 $p \to q$ 与 $\neg p \vee q$ 是否等值。

例题 3：用等值演算求命题公式 $A = (p \to q) \to r$ 的主析取范式、主合取范式、成真赋值、成假赋值。

考点 L3：量词辖域与谓词符号化

相关知识点

1. 全称量词 $\forall x$ 表示“任意 x”；存在量词 $\exists x$ 表示“存在某个 x”。
2. 量词辖域是不含该量词本身、但直接受该量词约束的公式；括号决定辖域大小。
3. 约束变元只在对应辖域内有效；不同量词即使用同一个字母，也可能表示不同的局部变量。
4. “所有 A 都是 B”常写为 $\forall x(A(x) \to B(x))$。
5. “有的 A 是 B”常写为 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$。

例题 1：谓词公式 $\exists x(A(x) \to \forall yB(y)) \vee \exists yD(y)$ 中量词 $\exists y$ 的辖域是什么？

例题 2：设 $S(x)$ 表示“x 是学生”，$H(x)$ 表示“x 会画哈斯图”。将“所有学生都会画哈斯图”符号化。

例题 3：命题“有的工人有拖延症。”写出谓词符号化与命题符号化。

考点 L4：前束范式

相关知识点

1. 前束范式形如 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n\,B$，其中 B 不含量词。
2. 第一步消去蕴含：$P\to Q\equiv\neg P\vee Q$。
3. 第二步否定内移：$\neg\forall xP(x)\equiv\exists x\neg P(x)$，$\neg\exists xP(x)\equiv\forall x\neg P(x)$。
4. 第三步约束变元改名，避免不同量词共用同一字母造成混淆。
5. 第四步在变元不自由出现的条件下前移量词，例如 $(QxP(x))\vee R\equiv Qx(P(x)\vee R)$。

例题 1：将 $(\forall xP(x))\to\exists yQ(y)$ 化为前束范式。

例题 2：求 $(\exists xA(x)\vee\exists xB(x))\to\forall x(A(x)\vee B(x))$ 的前束范式。

考点 L5：推理证明

相关知识点

1. 推理证明要先列出前提和结论，再逐行写推理根据。
2. 假言推理：由 $P \to Q$ 与 P 可推出 Q。
3. 拒取式：由 $P \to Q$ 与 $\neg Q$ 可推出 $\neg P$。
4. 析取三段论：由 $P \vee Q$ 与 $\neg P$ 可推出 Q。
5. 证明题不能只写结论，要说明每一步由哪些前提或已证公式推出。

例题 1：某教室投影无法使用。调查后得到：

(1) 如果线路正常，则投影仪有电；

(2) 如果线路不正常，则需要报修；

(3) 或者电源开关打开，或者投影仪没有电；

(4) 电源开关没有打开。

请先进行符号化，再证明需要报修。

例题 2：在一个刑事案件中，刑警抓到四名嫌疑人，调查后确认：

(1) 只有 B 是主谋，C 才是主谋；

(2) 如果 C 不是主谋，则 D 是主谋；

(3) 或者 A 是主谋，或者 B 不是主谋；

(4) A 不是主谋。

请先进行符号化，再用推理方法证明谁是真正的主谋。

3　集合与二元关系篇

本篇重点知识

1. 熟练掌握关系的三种表示:集合表示、关系矩阵、关系图。
2. 能在关系图与关系矩阵之间互相转换,并注意自环、反向边和元素顺序。
3. 能用“长度为 2 的有向通路”理解关系复合,并画出复合后的关系图。
4. 能判断关系是否为等价关系或偏序关系,尤其区分对称性与反对称性。
5. 能从关系矩阵或关系图中提取覆盖关系,进而画出哈斯图。

考点 S1:幂集与子集计数

相关知识点

1. 幂集 $\mathcal{P}(A)$ 是集合 A 的所有子集构成的集合。
2. 空集 $\varnothing$ 是任意集合的子集,所以 $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$。
3. 若 $|A| = n$,则 A 的子集个数为 2^n,即 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$。
4. $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 不同:前者没有元素,后者有一个元素。
5. 若 $A = \{\varnothing\}$,则 A 只有一个元素,所以 $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$。

例题 1:若 $A = \{1, 2, 3\}$,则 $|\mathcal{P}(A)|$ 是多少?

例题 2:设 $A = \{\varnothing\}$,判断 $\mathcal{P}(A)$ 的正确表达式。

例题 3:设 $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,求 $|\mathcal{P}(A)|$。

考点 S2：二元关系个数

相关知识点

1. A 上的二元关系是笛卡尔积 $A \times A$ 的任意子集。
2. 若 $|A| = n$，则 $|A \times A| = n^2$。
3. 每个有序对都可选择“属于关系”或“不属于关系”，所以二元关系总数为 2^{n^2}。
4. 若题目问从 A 到 B 的二元关系，则关系是 $A \times B$ 的子集，个数为 $2^{|A||B|}$。

例题 1：设 $|A| = 2$，则 A 上不同的二元关系有多少个？

例题 2：若 $|A| = 5$，则 A 上二元关系有多少个？

例题 3：若 $|A| = 2, |B| = 3$，从 A 到 B 的二元关系有多少个？

考点 S3：关系图与关系矩阵互化

相关知识点

1. 写关系矩阵前必须固定元素顺序，如 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$。
2. 若 $(a_i, a_j) \in R$，则矩阵 M_R 的第 i 行第 j 列为 1；否则为 0。
3. 关系图中每个有序对 (a_i, a_j) 画成一条从 a_i 指向 a_j 的有向边。
4. 主对角线元素 $m_{ii} = 1$ 表示顶点 a_i 有自环。
5. 矩阵转关系图时，要逐行读取所有 1，不要漏掉自环和反向边。

例题 1： 设 $A = \{a, b, c\}$，$R = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$。按元素顺序 a, b, c 写出关系矩阵。

例题 2： 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，关系图中有弧 $1 \to 1, 1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$。写出 R 的关系矩阵。

例题 3： 给定关系矩阵

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

画出对应的关系图。

考点 S4：关系复合与复合后的关系图

相关知识点

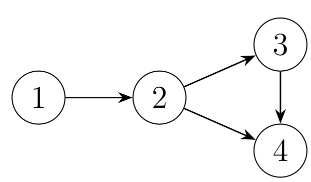
1. 关系复合定义：$(x,z) \in S \circ R$ 当且仅当存在 y，使 $(x,y) \in R$ 且 $(y,z) \in S$。
2. $R^2 = R \circ R$，表示把关系 R 连续使用两次。
3. 从关系图看，若存在长度为 2 的有向通路 $x \to y \to z$，则 R^2 中有边 $x \to z$。
4. 从矩阵看，$M_{R^2} = M_R \odot M_R$，其中加法用“或”，乘法用“且”。
5. 复合后若多条长度为 2 的通路得到同一有序对，只写一次。

例题 1：若 $R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$，写出 R^2。

例题 2：若 $R = \{(1,1),(1,2),(2,3)\}$，写出 R^2。

例题 3：设 $R = \{\langle x,y\rangle \mid x$ 与 y 是母女关系$\}$，写出 R^2。

例题 4：给出关系图



画出 R^2 的关系图。

考点 S5：等价关系与偏序关系判断

相关知识点

1. 自反性：对任意 $a \in A$，都有 $(a, a) \in R$。
2. 对称性：若 $(a, b) \in R$，则 $(b, a) \in R$。
3. 反对称性：若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, a) \in R$，则必须有 $a = b$。
4. 传递性：若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$，则 $(a, c) \in R$。
5. 等价关系要求自反、对称、传递；偏序关系要求自反、反对称、传递。
6. 矩阵判断时，自反看主对角线是否全为 1；反自反看主对角线是否全为 0。
7. 对称看 $M_R = M_R^{\mathrm{T}}$；反对称看是否不存在 $i \neq j$ 时 $m_{ij} = m_{ji} = 1$。
8. 布尔乘积 M_R^2 的第 i 行第 j 列为 1，表示存在某个中间元素 a_k，使得 $a_i R a_k$ 且 $a_k R a_j$。
9. 传递性要求由 $a_i R a_k$ 和 $a_k R a_j$ 推出 $a_i R a_j$，所以若 M_R^2 中某处为 1，则 M_R 的对应位置也必须为 1。

例题 1：判断包含关系 $\subseteq$ 是否为 $\mathcal{P}(S)$ 上的偏序关系。

例题 2：设 $A = \{4, 2, 5, 10, 20\}$，R 是 A 上的整除关系，判断 R 是否为等价关系。

例题 3：设

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

判断 R 是否具有自反、反自反、对称、反对称、传递性。

考点 S6：由关系矩阵画哈斯图

相关知识点

1. 哈斯图只用于偏序关系；画图前先检查自反、反对称、传递。
2. 画哈斯图时去掉所有自环，因为自反边不在图中画出。
3. 若 $a \preceq b \preceq c$，则 $a \preceq c$ 是传递边，哈斯图中不直接画。
4. 只保留覆盖关系：a 被 b 覆盖，表示 $a \prec b$ 且不存在 c 满足 $a \prec c \prec b$。
5. 最大元是大于等于所有元素的元素；极大元只要求不存在比它更大的元素。
6. 最小元是小于等于所有元素的元素；极小元只要求不存在比它更小的元素。

例题 1：在偏序集 $A = \{2, 3, 6, 12\}$ 的整除关系中，求最大元、最小元、极大元、极小元。

例题 2：设 $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$，R 是整除关系。画哈斯图，并求最大元、最小元、极大元、极小元。

例题 3：给定 $A = \{a, b, c, d\}$ 上关系矩阵

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

判断它是否表示偏序关系；若是，画哈斯图。

4　图论篇

考点 G1：度数、握手定理与简单图最大度

相关知识点

1. n 阶简单图中，每个顶点最多与其余 $n-1$ 个顶点相邻，所以 $\Delta(G) \leq n-1$。
2. 最小度 $\delta(G)$ 是所有顶点度数的最小值；最大度 $\Delta(G)$ 是所有顶点度数的最大值。
3. 若 $\delta(G)=n-1$，则每个顶点度数都等于 $n-1$，图为完全图 K_n。
4. 无向图握手定理：$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$。
5. 度数为 0 的顶点是孤立点；若题目没有排除孤立点，不能仅由边数推出顶点数上界。
6. n 阶有向完全图中，任意两个不同顶点之间有两个方向相反的弧，所以每个顶点的入度和出度都为 $n-1$。

例题 1：若无向完全图 K_n 有 45 条边，求 n。

例题 2：n 阶有向完全图的每个结点的入度是多少？

例题 3：设图 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G)=n-1$，求 $\Delta(G)$。

例题 4：图 G 有 10 条边，4 个 3 度顶点，其余顶点度数均小于等于 2，判断“G 最多 8 个顶点”是否正确。

考点 G2：道路、简单道路、初级道路

相关知识点

1. 道路是顶点与边交替出现的序列，相邻顶点之间必须有对应的边。
2. 闭道路的起点和终点相同；开道路的起点和终点不同。
3. 简单道路通常强调边不重复；初级道路通常强调顶点不重复，具体以教材定义为准。
4. 回路是起点等于终点的闭道路，并满足相应“不重复”条件。
5. 判断“任一道路都是……”这类命题时，常用重复顶点或重复边构造反例。

例题 1：给出一条重复顶点或重复边的道路，判断它是否为简单道路、初级道路。

例题 2：判断“图 G 中的任一道路都是简单道路或者初级道路”是否正确。

考点 G3：邻接矩阵幂与回路计数

相关知识点

1. 邻接矩阵 A 中，a_{ij} 表示从 v_i 到 v_j 的边数；简单有向图中只取 0 或 1。
2. A^k 的第 (i, j) 个元素表示从 v_i 到 v_j 长度为 k 的通路条数。
3. A^k 的对角线元素表示从某顶点出发又回到自身的长度为 k 的闭通路条数。
4. $\operatorname{tr}(A^k)$ 表示长度为 k 的闭通路总数。
5. 长度小于等于 2 的闭通路数通常计算为 $\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(A^2)$。

例题 1：若邻接矩阵为 M，说明 $\operatorname{tr}(M^3)$ 的图论含义。

例题 2：若邻接矩阵 A 满足

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

则长度为 2 的闭通路共有多少条？

例题 3：设有向图 G 的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求长度小于或等于 2 的回路条数。

例题 4：给定有向图邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

求长度小于或等于 2 的闭通路条数。

考点 G4：完全图的非同构生成子图

相关知识点

1. 完全图 K_n 有 n 个顶点，任意两不同顶点之间都有一条边，共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。
2. 生成子图必须保留原图全部顶点，只能删除边，不能删除顶点。
3. 非同构图的判断不能依赖顶点名称；顶点重新标号后若结构相同，则仍是同构。
4. 常用同构不变量包括边数、度数序列、连通分支数、是否有圈、三角形个数。
5. 若题目要求枚举，可统一按以下步骤处理：

$$\text{边数拆分到连通分支} \Longrightarrow \text{列出每个分支形状}$$
$$\Longrightarrow \text{补孤立点到}n\text{ 个顶点} \Longrightarrow \text{画代表图并用不变量查重}$$

例题 1： 已知无向图 K_4，画出含 2 条边的非同构生成子图。

例题 2： 已知无向图 K_6，画出含 3 条边的非同构生成子图。

考点 G5：Dijkstra 最短路径

相关知识点

1. Dijkstra 算法用于边权非负的最短路径问题；若存在负权边，不能直接使用。
2. 初始化时，起点距离为 0，与起点相邻的顶点距离为对应边权，其余顶点为 ∞。
3. 每一轮选取未确定顶点中暂定距离最小者，将其标记为确定。
4. 用新确定顶点更新其邻点：若 $d(u) + w(u,v) < d(v)$，则更新 $d(v)$ 和前驱点。
5. 记录前驱点可以恢复最短路径；只写最短距离通常不完整。
6. 若两个顶点暂定距离相同，可任选其一先确定，最终距离不受影响。

例题 1：Dijkstra 算法能否直接用于含负权边的图？

例题 2：无向带权图的边为 $v_0v_1(2), v_0v_2(5), v_1v_2(1), v_1v_3(2), v_2v_3(3), v_2v_4(1), v_3v_4(2)$。用 Dijkstra 算法求 v_0 到各顶点的最短距离。

例题 3：给定非负权图，写出从起点开始每一轮确定的顶点顺序。

考点 G6：AOE 网络与关键路径

相关知识点

1. AOE 网络中, 顶点表示事件, 箭线表示活动, 箭线权值表示活动持续时间。
2. 虚活动持续时间为 0, 只用于表达先后依赖关系。
3. 事件最早发生时间 ve 用正推计算：某事件的 ve 等于所有前驱事件完成时间的最大值。
4. 事件最迟发生时间 vl 用逆推计算：从终点工期开始, 向前取所有后继约束的最小值。
5. 活动 (i, j) 的总时差为 $TF(i, j) = vl(j) - ve(i) - w(i, j)$。
6. 总时差 $TF = 0$ 的活动是关键活动；关键活动首尾相接形成关键路径。
7. 关键路径长度等于项目最短完成工期。

例题 1：某 AOE 网络中, 活动 X 的 $ES = 3$, 持续时间为 4, $LF = 9$。求活动 X 的总时差, 并判断它是否为关键活动。

例题 2：若某活动总时差 $TF = 0$, 判断它是否为关键活动。

例题 3：AOE 网络活动为 $A: 1 \to 2(3)$, $B: 1 \to 3(2)$, $C: 2 \to 4(4)$, $D: 3 \to 4(1)$, $E: 4 \to 5(2)$。求关键路径和项目工期。

5 考前检查清单

- 能按三大篇识别题型。
- 会判断命题并符号化。
- 会列真值表求主范式。
- 会找量词辖域。
- 会做前束范式。
- 会写推理证明步骤。
- 会计算幂集与关系个数。
- 会由关系图写关系矩阵。
- 会由关系矩阵画关系图。
- 会写关系复合。
- 会画复合后的关系图。
- 会判断等价/偏序。
- 会由偏序矩阵画哈斯图。
- 会区分最大元与极大元。
- 会用握手定理。
- 会用邻接矩阵幂数回路。
- 会判别完全图生成子图是否同构。
- 会跑 Dijkstra。
- 会画 AOE 网并求关键路径。