厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

第一章 行列式

第1讲 行列式的定义

历史前沿：行列式的起源

数学发展中的“不期而遇”

行列式的发现，并非一蹴而就，它实际上比矩阵的概念更早出现。

- **关孝和** (日本，1683年)：在《解伏题之法》中最早提出了行列式的概念，用于解决复杂的联立方程。
- **莱布尼茨** (德国，1693年)：独立发现了行列式，并给出了求解线性方程组的一般公式。

> 从最初作为解方程的实用工具，到后来发展为独立的代数分支。科学家们往往不满足于能够解决单个问题的**算术技巧**，而是致力于探究现象背后具有普适性的**不变规律**。

为什么要学习行列式?

在经济学和管理学中，我们经常需要处理**多变量**系统。

- **市场均衡**：多种商品的价格和数量如何同时决定?
- **投入产出**：不同产业之间的关联如何量化?

这些问题最终往往归结为求解**线性方程组**。

> **行列式** (Determinant) 就是一个能够判定线性方程组是否有**唯一解**的重要工具。

二阶行列式：直观定义

考虑最简单的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

使用消元法求解，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解。

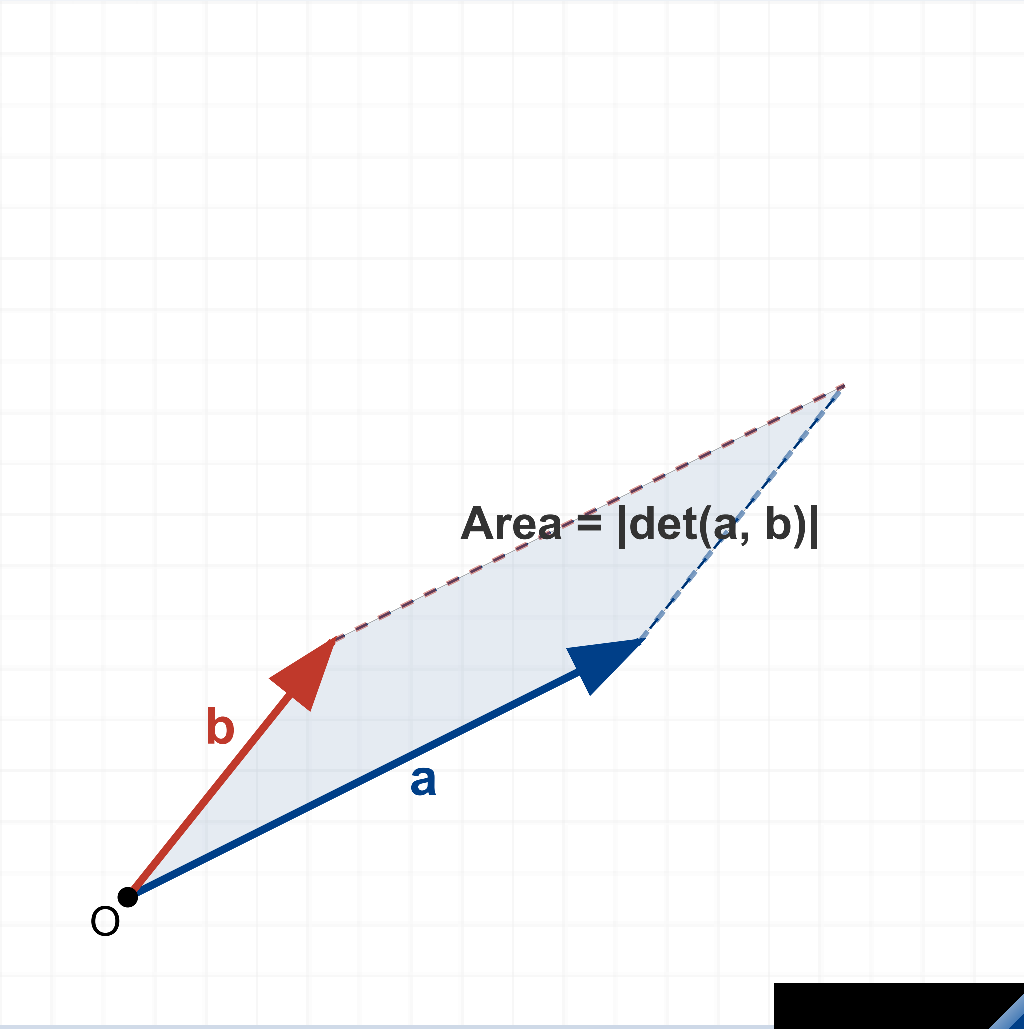
我们定义**二阶行列式**为：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **主对角线**：a_{11}, a_{22} （乘积取正）
- **副对角线**：a_{12}, a_{21} （乘积取负）

二阶行列式 $|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}|$ 的绝对值表示由向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 张成的**平行四边形的面积**。

- 如果行列式为 0，意味着面积为 0，即两个向量**共线**（线性相关）。
- 这对应于方程组中两个方程本质上是“同一个”或者矛盾，无法确定唯一解。



计算二阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解：

根据主对角线与副对角线的乘积法则：

$$\begin{aligned} D &= 2 \times 4 - (-1) \times 3 \\ &= 8 - (-3) \\ &= 11 \end{aligned}$$

即时练习：二阶行列式

即时练习

题目：计算下列二阶行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}$$

解析：

根据对角线法则：

$$
\begin{aligned}
D &= 3 \times 5 - (-2) \times 4 \\
&= 15 - (-8) \\
&= 15 + 8 \\
&= 23
\end{aligned}
$$

对于三个变量的方程组，系数构成**三阶行列式**：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

计算公式（沙路法则是/对角线法则）：

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意：对角线法则仅适用于二阶和三阶行列式，不适用于四阶及以上。

例 1.1.2：三阶行列式计算

计算三阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解：

利用沙路法则展开计算：

$$\begin{aligned} D = &\ 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 \\ &- (-4) \times 2 \times (-3) - 2 \times (-2) \times (-2) - 1 \times 1 \times 4 \\ = &\ (-4) + (-6) + 32 - 24 - 8 - 4 \\ = &\ -14 \end{aligned}$$

例 1.1.3：n 阶行列式定义的理解 (题)

题目：下列 $n(n>2)$ 阶行列式的值必为零的是

(A) 行列式主对角线上的元素全为零

(B) 上三角行列式主对角线上有一个元素为零

(C) 行列式零的元素的个数多于 n 个

(D) 行列式非零元素的个数小于等于 n 个

*思考：理解 n 阶行列式定义中，“每项取自**不同行不同列**的 n 个元素的乘积”的含义。*

解：

行列式的值是 $n!$ 项乘积的代数和，每一项都是 n 个元素的乘积。

- **(A) 和 (C)**：某些位置为 0 不代表所有展开项都含 0，无法判定全军覆没；
- **(B)**：结论正确，但这是“上三角结构”赋予的特殊梯形式推论，从“纯定义结构”看不够直接；
- **(D)**：由于非零元素个数**小于等于** n，而每项都需要挑选 n 个元素。如果非零元素不足 n 个（或者恰为 n 但位置不满足条件），那么**任何一项必定至少包含一个 0**。
  从而每一项乘积都为 0，行列式的值必为 0。

正确答案：(D)

IS-LM 模型分析

在宏观经济学中，IS-LM 模型描述了产品市场和货币市场的均衡。

$$\begin{cases} (1-c)Y + bi = A & \text{(IS Curve)} \\ kY - hi = \frac{M}{P} & \text{(LM Curve)} \end{cases}$$

要判断均衡国民收入 Y 和利率 i 是否存在唯一解，我们需要计算系数矩阵的行列式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-c & b \\ k & -h \end{vmatrix} = -h(1-c) - bk$$

如果 $\Delta \neq 0$，则均衡存在。这展示了行列式在**模型可解性判定**中的核心作用。

- **排列**：n 个不同元素排成一列。
- **逆序数**：一个排列中，大数排在小数前面的对数。
- **n 阶行列式定义**：

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

这定义了通用的计算逻辑，但在实际（特别是高阶）计算中，我们主要依赖**行列式的性质**（下一讲介绍）。