厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

第一章 行列式

第2讲 行列式的性质与计算

为什么要学习行列式的性质?

回顾：
n 阶行列式的定义涉及 $n!$ 项求和。

- $n = 3$ 时，有 $3! = 6$ 项（尚可手算）。
- $n = 4$ 时，有 $4! = 24$ 项。
- $n = 10$ 时，有 $3,628,800$ 项！

困境：
直接使用定义计算高阶行列式几乎是不可能的。

出路：
利用**性质**简化计算，将复杂行列式转化为易算的形状（如**上三角行列式**）。

性质 1：转置不变性

性质 1：行列式与它的转置行列式相等。

$$D = D^{\mathsf{T}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$$

> **重要推论**：行列式中**行与列具有同等的地位**。
> （凡是对行成立的性质，对列也同样成立）

性质 2：互换行列式的两行（列），行列式变号。

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \quad (\text{原值} \ -2 \text{ 的相反数})$$

性质 3：倍乘性质

性质 3：行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

> **等价说法**：行列式某一行（列）所有元素的**公因子**可以提到行列式记号外面。

性质 4：行列式的分拆性

性质 4：若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，例如第 i 行元素形如 $a_{i1}+b_{i1}, a_{i2}+b_{i2}, \cdots, a_{in}+b_{in}$，则该行列式等于下列两个行列式之和：

- 第一个行列式的第 i 行元素为 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$
- 第二个行列式的第 i 行元素为 $b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in}$

  其余各行（列）的元素在这三个行列式中完全相同。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

性质 5：倍加不变性（核心）

性质 5：把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数 k 然后**加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$

> **这是计算行列式最常用的方法！**
> 我们可以用它来“消元”，制造大量的 **0**。

定理推论：快速判定行列式为 0

综合上述性质，我们可以在计算前直接“秒杀”一部分特殊的行列式。

若某 n 阶行列式满足下列条件之一，则该行列式必为 0：

1. 某一行（列）的元素**全为 0**。（性质 3 提公因子 0）
2. 有两行（列）**完全相同**。（性质 2 互换变号导致 $D = -D$）
3. 有两行（列）元素**成比例**。（性质 3 提取比例系数后，两行相同）

> 掌握这些推论，可以极大提升解题速度。

计算策略：化三角形法

目标：将行列式化为**上三角**（或下三角）行列式。

$$D = \begin{vmatrix} {\color{blue}a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & {\color{blue}a_{22}} & a_{23} \\ 0 & 0 & {\color{blue}a_{33}} \end{vmatrix} = {\color{blue}a_{11}a_{22}a_{33}}$$

步骤：

1. 选取第一列中不为 0 的元素（最好是 1 或 -1）作为“枢轴”。
2. 利用性质 5，将枢轴下方的所有元素化为 0。
3. 对剩下的右下角子块重复上述过程。

例 1.2.1：计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

思考：可以利用哪一行的元素作为基准去消除同列上的其他元素，从而化出上三角结构？

解：利用性质 5（倍加法）将对角线以下的元素变为 0。

$$D \xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{消去第2行的3})$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{消去第3行的-1})$$

$$\xrightarrow{\text{互换}r_2,r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \times 4 \times 3) = \mathbf{-12}$$

即时练习：化三角形 (题)

即时练习

题目：利用性质计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

提示：

- 观察哪一行或一列的 **0** 最多?
- 可以先通过**交换行**将含 0 多的行移动。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

解析：

1. **交换行** $(r_2 \leftrightarrow r_3)$，**注意变号：**

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. **利用 r_3 的特殊性：** 该行只有一个非零元素 3，非常适合后续按行展开或进一步消元化为三角形。

3. **结果：** 最终化为三角形行列式计算，得到结果。

(此处建议同学们在草稿纸上完成最后两步)

技巧总结：箭形行列式

对于形如“箭形”的结构（除第一行、第一列和对角线外均为0）：

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ d & y & 0 & 0 \\ e & 0 & z & 0 \\ f & 0 & 0 & w \end{vmatrix}$$

策略：
利用对角线上的非零元素 y, z, w，分别乘以适当系数加到第一列，将 d, e, f 消为 0。
这样就变成了下三角行列式！

例 1.2.2：计算箭形行列式（一）

计算四阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ d & y & 0 & 0 \\ e & 0 & z & 0 \\ f & 0 & 0 & w \end{vmatrix} \quad (y,z,w\neq 0)$$

分析：除第一行、第一列和对角线外全为 0，符合箭形结构特征。我们要设法利用对角线上的 y,z,w 把 d,e,f 消掉。

解：

第一列分别减去第2、3、4列的倍数（即 $c_1 - \frac{d}{y}c_2 - \frac{e}{z}c_3 - \frac{f}{w}c_4$）：

$$D = \begin{vmatrix} x - \frac{ad}{y} - \frac{be}{z} - \frac{cf}{w} & a & b & c \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{vmatrix}$$

$$= \left(x - \frac{ad}{y} - \frac{be}{z} - \frac{cf}{w}\right) \cdot yzw$$

由于整体变为了一个下三角结构，其值即为主对角线元素的乘积。

例 1.2.3：计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 101 & 198 & 302\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

思考：第 2 行的数字过大，能否利用性质 5，借助其他行的“小整数”将其体积缩减？

解： 利用“倍加性质”尽可能削减大数字制造“0”：

$$D \xrightarrow{r_2-100r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

最后，按制造出最多 0 的**第 1 列**展开：

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-4) \times (-2) - (-1) \times (-3) = 8 - 3 = \mathbf{5}$$

厦门大学嘉庚学院 XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

例 1.2.4：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且具备如下基础条件：
$\left|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1\right| = m, \quad \left|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\right| = n$

计算目标：$\left|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2\right|$

思考：这里包含了列元素的相加（可应用性质 4 进行拆分），以及向量排序的颠倒（可应用列交换变号性质进行归位），我们需要拆解步骤来解决目标式块。

解：

1. **按列拆分**：根据行列式某列等于两向量之和，可拆分为两个行列式之和：
   $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2|$
2. **列交换调序还原**（每次互换改变自身符号）：
   - 第一项列排列：$(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) \xrightarrow{\text{交换 1,3 列}} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 发生 1 次互换。
     故代入已知得 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1| = -|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = -m$
   - 第二项列排列：类似第一项互换复原 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)$，发生 1 次互换。又条件中限定形式 $\boldsymbol{\beta}_2$ 在第 3 列，还需再互换 3，4 列一次，即总共换位 $1 + 1 = 2$ 次（偶数次！）。由于已知目标态为奇数次（多换了一次），所以仍保留为负：
     即由 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n$ 导出第二部拆解值为 $-n$。
3. **最终合并**：结果为 $-m - n = \mathbf{-(m + n)}$。

避坑指南：性质计算中的“陷阱”

精度就是一切

在利用性质进行行列式化简计算时，最常见的失误往往是：

- 交换两行（列）时，**忘记在行列式前加负号**；
- 提取公因子时，**漏掉了负号或者漏提了某一行**。

> 行列式是一个严格的运算系统。任何一步微小的符号遗漏或系数错放，都会导致整个计算系统发生雪崩式的偏差，得出毫无意义的结果。在复杂的数据处理模型中，**“思路对了”只是起点，“每一步都没错”才是终点**。养成严谨步步为营的检查习惯，是本节课的核心要求。

只要算出三角形

一切都会好起来的