厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

第3.5讲 范德蒙行列式

第一章 行列式 (专题讲义)

规律识别：范德蒙 (Vandermonde) 行列式

特征：第一行全为 1，每一列呈“等比增长”结构。

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

计算口诀：“后减前，连乘积”。

$$V_n = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$

例 3.5.1：计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$。

解：

1. **识别变量**：各列分别为 $2,3,4$ 的 $0,1,2$ 次幂，故 $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$。
2. **运用公式**：$D = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$
3. **计算结果**：$D = (3-2)(4-2)(4-3) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$。

练习 3.5.2： 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

提示：观察每一行（或每一列）是否符合范德蒙结构的“幂增长”特征。

解析 3.5.2:

1. 结构核对:

本行为“转置型”范德蒙结构。各列分别是 $1, -1, 2, 3$ 的幂次。

由此确认 $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3$。

2. 公式计算:

$D = (-1 - 1)(2 - 1)(3 - 1) \cdot (2 - (-1))(3 - (-1)) \cdot (3 - 2)$

$D = (-2)(1)(2) \cdot (3)(4) \cdot (1)$

3. 最终结果: $D = -48$。

练习 3.5.3：计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

提示：若某行不以 1 开头，尝试提取该行的公因子。

解析 3.5.3：

1. **前处理 (提因子)：** r_2 提 4，r_3 提 3，r_4 提 1（可选）。

$$D = 4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 12 \times V(1,2,3,4)$$

2. **计算** $V(1,2,3,4)$：
   $(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$
3. **最终结论：** $D = 12 \times 12 = 144$。

模式识别的力量

掌握特殊结构的直观计算

“后减前，连乘积”