厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

第3讲 行列式按行（列）展开定理

第一章 行列式

计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解（利用乘加性质 5）：

基础策略为利用初等行变换将其转化为上三角结构。

第 n 行减去 a_n 倍的第 1 行 $(r_n - a_n r_1)$：

左下角元素化为 0，其右侧产生新的非零元素 $-a_n a_1$。

引路题：连续消元的代价

针对新元素 $-a_n a_1$ 进行二次消元：
第 n 行加上 $a_n a_1$ 倍的第 2 行 $(r_n + a_n a_1 r_2)$：
该位置化为 0，但引发右侧产生非零元素 $a_n a_1 a_2$。

依次类推，执行 $n-1$ 次连环操作（伴随符号交替），导致主对角线右下角的 1 最终叠加为：

$$1 + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n$$

利用上三角行列式特性，即得主对角线元素之积：

$$D_n = 1 + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n$$

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

现有运算机制的局限性：
性质 5 虽可将行列式化为三角阵，但对于含有大规模参数或高度稀疏等特殊结构的行列式，传统的连续消元法则容易导致运算结构冗长且极易出错。
核心思想：通过构建降阶法则
如若能将判定 n 阶行列式的取值，拆分为求取多个 $(n-1)$ 阶子行列式的常数加权组合，则计算将被指数级化简。
这即是**行列式按行（列）展开定理**确立的底层价值。

余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，剩下的元素构成的 $(n-1)$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}。
定义 a_{ij} 的**代数余子式**为：

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

> **符号规律**：代数余子式 A_{ij} 的符号判定依据元素在矩阵中的位置，呈现**正负号棋盘状交替**分布（左上角为 $+$，相邻异号）。计算中如果直接给出 M_{ij} 求和，务必第一眼先把系数还原为 A_{ij} 的正确符号！

行列式按行（列）展开定理

定理：行列式等于它的任一行（或列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

按第 i 行展开：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

按第 j 列展开：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

> **策略**：通常选择零元素最多的一行（列）进行展开。

例 1.3.1：计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\0&5&0&0\\1&1&0&1\\2&0&1&3\end{vmatrix}$$

解题切入点：优先选择零元素分布最密集的一行（或列）以实施定理降阶。

典例分析 (析)

解：发现第 2 行只有元素 5 非零，按第 2 行展开：

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$$

$$D = 0 + 5 \cdot A_{22} + 0 + 0 = 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

利用对角线法则或性质计算三阶行列式：

$$D = 5 \cdot [0 + (-2) + 2 - 0 - 3 - (-3)] = 5 \cdot 0 = 0$$

计算技巧：先消元再展开

实战策略：

并不总能遇到像例 1 那样整行只有 1 个非零元素的情况。

1. 先利用性质 5（倍加变换），将某行（列）处理成**只有一个非零元素**。
2. 然后对该行（列）进行展开，实现**降阶**。
   这种方法在处理含有字母的行列式时尤为高效。

例 1.3.2：已知四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$，

求解该常数组合式项：$-A_{41} + A_{42} - 2A_{43} + A_{44}$。

解题策略：此多项式的参数分布 $(-1, 1, -2, 1)$ *明显区别于母矩阵第 4 行，无法直套定理公式，须利用余子式的代数替换等价性对原始矩阵矩阵发起重定义。*

解：展开定理的逆向应用阐明——**若以任意一组有序列常数域代数余子式求内积计算**，其等效于**将原行列式对应行（或列）的数据覆为这组参数后生成的全新行列式。**

目标式态 $-A_{41}+A_{42}-2A_{43}+A_{44}$ 的外部系数为 $(-1,1,-2,1)$，故对原始行列式的第 4 行执行强制替换：

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

MatNoble

进而针对重定义后的新行列式，按仅有单个非零元的第 3 行施行降阶操作：

$$= (-3)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

对于被隔离出的三阶子结构，以高斯常数或对角线法则予以末端求解：

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (6-2-2)-(-3-8-(-1)) = 2-(-10) = -8$$

合并各因数由此得解：原式 $= 3\times(-8) = -24$。

再次代入该篇首展示用 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

直接锁定**第 1 列**展开环境（仅存两处非零位 $a_{11} = 1$ 及 $a_{n1} = a_n$）。

分离降阶公式结构：$D_n = 1 \cdot A_{11} + a_n \cdot A_{n1}$。

- 针对第一极角余子式：$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$，提取子阵 M_{11} 实为一个主特征值恒为 1 的常态上三角空间。计算结果恒等于 1。故第一乘数项最终反馈回：$1 \times 1 = 1$。
- 针对下缘极角余子式：$A_{n1} = (-1)^{n+1} M_{n1}$。且结构特征表面 M_{n1} 转为了一个对角序列等比递增排位 $a_1, a_2 \cdots, a_{n-1}$ 下的完备下三角系。其特解乘积化约为 $(-1)^{n+1}(a_1 \cdots a_{n-1})$。追加主元乘系数 a_n，代数形态汇聚为 $(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_i$。

组合通解值如下：

$$D_n = 1 + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n$$

> 对比例题，不难判定分离提取算子模式能够规整化繁杂操作并在很大层面上降低消元级联误差。

综述：

对于低阶或含有大量 0 的行列式，直接利用展开定理可快速降阶求解。但对于阶数较高或含有规律参数（如 n 阶行列式），强行展开极易导致计算爆炸。

我们需要根据它们**特殊的形状特征**，采用对应的**结构化运算套路**。

> 接下来我们将分析三类最常见的特型行列式：
>
> 1. **“行（列）和相等”行列式**
> 2. **箭型（爪型）行列式**
> 3. **加边法（升阶转化为箭型）**

特型一："行（列）和相等"的行列式

形式与形状特征：

在矩阵中，横向（或纵向）将每行（或每列）的所有元素相加，得到的**总和** S **恒为常数**（如每一列相加结果完全相同）。

核心运算套路（三步法则）：

1. **全归一处：** 将第 2 至第 n 列的元素全加到第 1 列（此时第 1 列全变为 S）。
2. **提取公因式：** 将第 1 列的公因子 S 提取至行列式外部（此时第 1 列全变为 1）。
3. **消元降阶：** 将第 1 行乘以 -1 加到其余各行（利用首位 1 将该列其余元素全化为 0），随即沿该列展开降阶。

例 1.3.3：计算具有相容性的四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解：提取矩阵基本代数参数得出，其横列或纵列向等加皆符合 $1+2+3+4=10$。

第一步运算基调：利用列向量整合功能将第 $2,3,4$ 列等比全量注入到第 1 列；并抽取其作为列公因子常数：

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

特型一：典例剖析 (2/3)

第二部降维工作：在基础性质 5 辅助下用倒角消除功能使首行负倍加入后面全层：

$$D = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

此时按绝对孤立的第 1 列予以解体退阶重列：

$$D = 10 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

在此基础面接手已下行的内部三阶子式。剥离冗长的行内常数字：第 2 层剔除系数常态 2 并对末行脱去系数负号标量 -1 从而建立更平滑之演算式：

$$D = 10 \cdot (2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

直接清算操作环节（构建为倒三角状态解之）：

$$D = -20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -20 \times [1 \times (-2) \times 4] = 160$$

特型二：箭型（爪型）行列式

形式与形状特征：

除某一行、某一列以及主对角线外，其余位置的元素全为 0。其非零数值的排布宛如一只“爪子”或一把带有尾羽的“利箭”。

核心运算套路（逆消元法）：

利用“箭身”（主对角线）上分散的非零元素，去反向消灭“箭端”（如第一行或第一列）上密集的非零元素。

设第一行和第一列为箭端：

将第 i 列提取适当倍数（通常为 $-\frac{x}{a_i}$）加到第 1 列，逐步将第 1 列除 a_{11} 外的元素全部洗成 0，最终化为上三角或下三角行列式。

例 1.3.4：计算 n 阶箭型阵列体系行列式 (定义集：$a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解：利用第 2 列至第 n 列对角线上的 a_k，去消灭第 1 列第 $2 \sim n$ 行的 1。
操作：依次将第 k 列乘以 $-\frac{1}{a_k}$ 加到第 1 列 $(k = 2, \cdots, n)$。

特型二：阵列空间投影演算

至此中心辐射状首行元素转化为 $a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i}$。且在其本列区域所有底元均全等清空等于 0：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

所得最终状态矩阵乃纯正对角线特征行列集结果：

$$D_n = \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=2}^{n} a_i = a_1 \prod_{i=2}^{n} a_i - \sum_{i=2}^{n} \prod_{j=2, j \neq i}^{n} a_j$$

特型三：加边法（升阶法）

形式与形状特征：

矩阵本身高度对称，最显眼的特征是**除了主对角线元素不同之外，其余所有元素完全相同**（通常全为 1 或者某个常数）。

核心运算套路（行式升维延展）：

将等分对称形式通过代数拓展一行一列推高维度：原高权位置设置其单位标向 1；平行动向则根据既定参数特征以定常补齐。这一扩展保持了 n 阶原有整体性数值规模在代数几何意义的严格不变平衡（加边值与展开的相抵约束）：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

接着依据高位第一行向下降级消除所有对位重复基项参数。这一环节把难以破壁的绝对向对等格式顺利代换到了**具有极性发散性的箭列分布形式**上面。

例 1.3.5：计算除主对角线外全为常态系数 1 的 n 阶行列系分布形式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解：施行增补延边算法体系以代建生成出完整阶级阵势：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

特型三：等阶形式逆化箭型演算

行系变换将所建增列标第一参数项赋倍数项向下逐一定点切削（$r_k - r_1, k = 2, \cdots, n+1$）：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n - 1 \end{vmatrix}$$

退形动作终值导向极佳，全阶阵法已被定态降构为一个标志性极高的**箭集放射行列系统**。

(该式承接下层处理法即对等切入特式类型二解结构逆代法操作序列：只须确认先设项组基值 $a_i - 1 \neq 0$ 定势，借外端子列行以 $-\frac{1}{a_k - 1}$ 比权重倒位清理标杆首列列项并输出对角化乘式模型即可)。

行列式降阶与结构对齐机制

代数参数抽象及全特型拓扑映射演武