厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

第4讲 克拉默法则与矩阵的概念

第一章 行列式 / 第二章 矩阵

针对二元一次方程组（$n = 2$ 的线性方程组）：

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = e \\ cx_1 + dx_2 = f \end{cases}$$

根据此前的消元法推导，其解具有**共同的分母** $ad - bc$。
由此可定义该方程组的**系数行列式**：

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

本节重点分析常数项如何影响解的**分子部分**。

逻辑推解：为何“列替换”有效?

1. **原始方程组 (向量视角)**： $x_1\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$

2. **系数行列式** D： 提取系数矩阵的行列式 $D=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$

3. **构造替换行列式** D_1： 将第 1 列替换为常数项

$$\begin{vmatrix}\mathbf{ax_1+bx_2} & b\\\mathbf{cx_1+dx_2} & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{e} & b\\\mathbf{f} & d\end{vmatrix}=D_1$$

4. **线性展开与归零**： 利用列线性性质拆分

$$x_1\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}+x_2\underbrace{\begin{vmatrix}b & b\\d & d\end{vmatrix}}_{=0}=x_1D\Rightarrow\mathbf{x_1}=\frac{\mathbf{D_1}}{\mathbf{D}}$$

从二阶到 n 阶：一般线性方程组

对于具有 n 个未知数、n 个方程的一般线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当变量个数 n 与方程个数相同，且系数行列式 $D \neq 0$ 时，可通过克拉默法则对其求解。

克拉默 (Cramer) 法则

定理：如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有**唯一解**，其解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 代替后所得到的 n 阶行列式。

> **注意**：若方程组无解或有无穷多解，则必有 $D = 0$。

练习 1.4.1：若线性方程组有唯一解，则其系数行列式 D 满足什么条件？

解析 1.4.1：

- 根据克拉默法则，方程组有唯一解的充要条件是**系数行列式** $D \neq 0$。

例 1.4.1：用克拉默法则解三元方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

梳理求解步骤：

1. 验证克拉默法则的适用前提。
2. 构造对应的算子行列式 D_1, D_2, D_3。

解： 执行“提取-构造-求解”三步法：

Step 1. 提取系数矩阵并计算 D

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

(系数行列式不为零，方程组有唯一解)

Step 2. 构造并计算分量行列式 D_j (前两列)

$$\text{替换第1列 } D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 1 & -1 \\ \mathbf{6} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \text{替换第2列 } D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{3} & -1 \\ 1 & \mathbf{6} & 1 \\ 1 & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix} = 8$$

典例分析 (续)

Step 2. 构造并计算分量行列式 D_j (续)

$$\text{替换第3列 } D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & \mathbf{6} \\ 1 & -1 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = 12$$

Step 3. 应用法则求解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{4} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{12}{4} = 3$$

当线性方程组等号右侧的常数项**全为 0** 时：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

特称其为 n **元齐次线性方程组**。

- 显然，齐次方程组**必有零解**（即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$）。
- **重要推论**：若其系数行列式 $D \neq 0$，依靠克拉默法则必有 $D_j = 0, x_j = \frac{0}{D} = 0$，故此时**仅有零解**。
- **逆否判定**：若该方程组存在**非零解**，其充要条件定为 $D = 0$。

总结：克拉默法则的贡献

理论贡献 (代数价值)

- **显式解析性**：建立了方程组通解与其系数间的定量公式。
- **理论基石**：为线性代数体系的存在性证明提供了严密工具。

算法局限

- **方阵限制**：方程个数必须等于未知数个数。
- **算力消耗**：在大规模数据面前，运算量过大。

> 面对海量且不对称的数据结构，我们必须升维至更底层的统合工具——**矩阵**。

矩阵概念的引入：数据表

在经济管理中，数据往往以表格形式出现。
案例：库存管理

产品 / 仓库	仓库 A	仓库 B	仓库 C
手机	100	150	80
平板	50	60	40

提取数据部分，即构成一个 2×3 的**矩阵** (Matrix)。通常而言，矩阵可被看作是由数值构成的矩形阵列。

矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵，简记为 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 或 (a_{ij})。

> **区别**：行列式是一个**数**（竖线），矩阵是一个**表**（方括号）。

1. **方阵**：行数 = 列数 $(n \times n)$。
2. **零矩阵**：所有元素全为 0，记作 $\mathbf{O}$。
3. **单位矩阵**：主对角线全为 1，其余全为 0 的方阵，记作 $\mathbf{E}$。
4. **行矩阵 / 列矩阵**：只有一行或一列的矩阵（也称**向量** $\boldsymbol{x}$）。
5. **对角矩阵**：只有对角线上有非零元素的方阵。

即时练习

作业要求：
请完成教材 习题 1-4 以下题目：

1. 克拉默法则： 1 (3)； 2, 3。
2. 矩阵基础： 观察并理解矩阵与行列式的形式差异。
3. 预习：
   - 矩阵的运算（加法、数乘、乘法——重难点）。

开启线性代数的新维度

从单纯的“求值”转为高效的“表处理”