第5讲矩阵的运算

第 二 章 矩 阵

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

CONTENTS

线性运算：数据的并行处理

PART 1

1.1 矩阵:作为数据的经济网格

在经济数学中,矩阵不仅仅是数字堆砌,它是 **系统状态的快照**:

- **行 (Rows)**:代表不同的产品或部门。
- **列 (Cols)**:代表不同的季度或地区。

Philosophy Box:管理复杂度的第一层级

矩阵运算的本质是 **并行化 (Parallelism)**。我们不再关注单一数值的变化,而是将整个行业、整个市场的变动视为一个整体进行平移或缩放。

1.2 [Metaphor View] 加法与数乘的跨界隐喻

隐喻：工厂配方合成

- **加法**：两家工厂合并订单。对应型号的产品需求量直接累加。
- **数乘**：生产规模翻倍。所有原材料的需求量同步扩张。

工厂 A　工厂 B $\longrightarrow$ 合并矩阵

工科逻辑

只有“同型号(同型阵)”才能合并。加法反映了系统的线性可加性。

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

即时练习

题:判定与计算

计算 $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$,并思考:如果第二项是 3×2 矩阵,还能加吗?

解析步解:

1. **数乘优先:** $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$。
2. **对应累加:** $\begin{pmatrix} 2+5 & 0+2 \\ -2+4 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$。

注意:判定结论

不同型矩阵严禁直接相加。报错提示通常为“Dimension Mismatch”。

矩阵乘法：系统间的耦合

PART 2

矩阵乘法 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ 的每一个点 c_{ij} 都是一次“深度内积”：

$$c_{ij} = (\text{前矩阵第}i\text{ 行}) \cdot (\text{后矩阵第}j\text{ 列})$$

工科理解：信号传输

将前矩阵看作“控制台”，后矩阵看作“响应器”。乘法描述了控制指令在系统间的传递过程。

即时练习

题:求矩阵积

已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&3\\4&0&5\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\\1&2\end{pmatrix}$,求 $\mathbf{AB}$。

解析步解 (结果应为 3×2 矩阵):

- $c_{11} = 1(2) + 2(0) + 1(1) = 3$
- $c_{12} = 1(-1) + 2(1) + 1(2) = 3$
- $c_{21} = 2(2) - 1(0) + 3(1) = 7$
- $c_{22} = 2(-1) - 1(1) + 3(2) = 3$

计算自检点

如果你算出的结果行列数与“前行后列”不符，说明第一步维度判定已错。

矩阵世界是“非通勤 (Non-commutative)”的:

- **一般不满足交换律**:$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$。
- **消去律失效**:若 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$,**不能销去** $\mathbf{A}$ 推出 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$。
- **零因子存在**:若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$,**不能推出** $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$。

注意:期末必考判定 (练习 5.6-5.8)

考试中最常见的选择题套路就是诱导你使用数乘的逻辑(如约分)来处理矩阵。

幂运算：快进计算的黑科技

PART 3

如果 $\mathbf{A}$ 是由向量直积构成的 ($\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}$):

1. **找内积:** 计算 $k = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}$ (这是一个数!)
2. **找规律:** $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T})\boldsymbol{\beta}^\mathsf{T} = k\mathbf{A}$
3. **通项公式:** $\mathbf{A}^n = k^{n-1}\mathbf{A}$

这个技巧可以将 *100* 次矩阵乘法转化为 *1* 次标量乘法。

即时练习

题:求 n 次幂

设 $\mathbf{A} = (1, 2, 3)^{\mathsf{T}}(1, 1/2, 1/3)$,求 $\mathbf{A}^n$。

解析步解：

1. 计算标量 k (后向量乘前向量)：

$$k = (1, 1/2, 1/3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

2. 直接代入通项：

$$\mathbf{A}^n = 3^{n-1}\mathbf{A}$$

注意：总结

看到这种“中间大、两头尖”的矩阵，优先检查是否满足 $\mathbf{A}^2 = k\mathbf{A}$。

即时练习

题:验证等式

已知 $\mathbf{A}=\mathbf{E}-\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{X}$,$\mathbf{B}=\mathbf{E}+2\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{X}$,且 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\top}=\frac{1}{2}$。验证 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$。

解析步解:直接展开,但切记不要随意交换位置:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} + 2\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top)\boldsymbol{X}$$

代入已知条件 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} + \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{X}^\top(\frac{1}{2})\boldsymbol{X} = \mathbf{E} + \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X} = \mathbf{E}$$

转置与行列式:复合算则

PART 4

在解决复杂综合题时，请握牢这三根“救命稻草”：

- **转置颠倒律**：$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ (HW 习题 5.1/5.6 考察点)
- **行列式积律**：$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
- **标量提取律**：$|\lambda\mathbf{A}| = \lambda^n|\mathbf{A}|$ (其中 n 为阶数)

警示

$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ 并不等于 $|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$。这是大一新生最易犯的逻辑错误。

即时练习

题:行列式计算

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 3 阶方阵,且 $|\mathbf{A}|=2,|\mathbf{B}|=3$。求 $|(2\mathbf{A})^{\mathsf{T}}\mathbf{B}|$。

解析步解：

1. **第一步（转置与积）：**$|(2\mathbf{A})^{\mathsf{T}}\mathbf{B}| = |(2\mathbf{A})^{\mathsf{T}}| \cdot |\mathbf{B}| = |2\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$
2. **第二步（提取标量）：**注意 $n = 3$，所以 2 提到外面要变成 2^3

$$2^3|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 8 \times 2 \times 3 = \mathbf{48}$$

归纳总结与下节预告

PART 5

第五讲核心归纳

- **一种思维**：矩阵是线性系统的数据快照。
- **两种运算**：加法是并行扩容，乘法是系统耦合。
- **三个不要**：不要交换、不要消去、不要以为行列式加法等于加法行列式。

矩阵运算实战结束

下节预告：逆矩阵与“解密”逻辑