第6讲 逆矩阵

第 二 章 矩 阵

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

CONTENTS

逆矩阵：系统的“还原键

PART 1

在标量代数中，解决 $2x = 6$ 只需除以 2 (或乘 $1/2$)。在矩阵世界中，解决 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$，我们需要一个“算子”来抵消 $\mathbf{A}$：

Philosophy Box：对称性与还原

逆阵的本质：它是线性变换的“逆过程”。如果 $\mathbf{A}$ 代表将现状变为目标，那么 $\mathbf{A}^{-1}$ 就是从目标追溯回现状的路径。在经济预测中，如果我们知道投入产出矩阵，逆矩阵能帮我们反推出实现特定经济目标所需的资源配置。

1.2 [Metaphor View] 加密与解密的跨界隐喻

隐喻：一把钥匙开一把锁

- **加密 (A)**：将明文数据 x 混淆为密文 y。
- **解密 ($\mathbf{A}^{-1}$)**：持有唯一的解密密钥，将密文还原回明文。

只有当锁没有坏（矩阵非奇异，即 $|\mathbf{A}| \neq 0$）时，才有唯一的钥匙。

$$
\begin{tikzcd}
\text{明文 } x \arrow[r, "\times \mathbf{A}"] & \text{密文 } y \arrow[l, bend left, dashed, "\times \mathbf{A}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

工科逻辑

逆矩阵存在 $\Longleftrightarrow$ 变换是单射且满射的（不丢失信息）。

即时练习

题:凑配法求逆

设 $\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \mathbf{O}$,证明 $\mathbf{A}$ 为可逆阵并求 $\mathbf{A}^{-1}$。

解析步解：

1. **第一步（常数项移项）**：$\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} = 4\mathbf{E}$。
2. **第二步（提取公因子）**：$\mathbf{A}(\mathbf{A} + 3\mathbf{E}) = 4\mathbf{E}$。
3. **第三步（构造定义）**：根据 $\mathbf{AB} = \mathbf{E} \implies \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}\left[\frac{1}{4}(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})\right] = \mathbf{E}$$

注意：判定结论与口诀

只要能把矩阵多项式凑出“$\mathbf{A} \times [\text{东西}] = \mathbf{E}$”，那个“东西”就是逆阵。

计算技战术:伴随法与二阶公式

PART 2

对于 2×2 矩阵，不需要去排矩阵，直接默写：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

工科速记口诀

- **计算行列式**：放在分母。
- **主对角调换**：a, d 位置互换。
- **副对角变号**：b, c 前面加个负号。

即时练习

题:计算逆矩阵

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$。

解析步解：

1. **行列式：** $1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$。
2. **主对调：** $\begin{pmatrix} 4 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$。
3. **副变号：** $\begin{pmatrix} \cdots & -2 \\ -3 & \dots \end{pmatrix}$。

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

- **定义**:各元素代数余子式的转置阵。
- **公式**:$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$。

Exam Focus:高频性质

- $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$
- $(\mathbf{kA})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$ (HW 6.7/6.8 常考点)

即时练习

题:计算行列式

设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵,$|\mathbf{A}|=1/3$,求 $|(3\mathbf{A})^{-1}+5\mathbf{A}^*|$。

解析步解:

1. **转换思路:**将 $\mathbf{A}^*$ 换成 $\mathbf{A}^{-1}$ 形式 $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}$。
2. **合并同类项:**

$$(3\mathbf{A})^{-1} + 5\mathbf{A}^* = \frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} + 5(\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}) = (\frac{1}{3} + \frac{5}{3})\mathbf{A}^{-1} = 2\mathbf{A}^{-1}$$

3. **计算最终行列式:**

$$|2\mathbf{A}^{-1}| = 2^3|\mathbf{A}^{-1}| = 8 \times \frac{1}{|\mathbf{A}|} = 8 \times 3 = \mathbf{24}$$

矩阵方程:剥洋葱法则

PART 3

由于矩阵乘法不满足交换律，在方程两端“乘”必须要同侧进行：

剥洋葱准则

想要消去哪个矩阵，就顺着它的反方向“剥离”：

- **左乘消左**：$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$
- **右乘消右**：$\mathbf{XA} = \mathbf{B} \implies \mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}$
- **双重包夹**：$\mathbf{AXB} = \mathbf{C} \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$

即时练习

题:求解矩阵 $\mathbf{X}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}。$$

解析步解：

1. **设阵：**令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$。
2. **求逆：**$|\mathbf{A}| = 5, \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$。
3. **左乘：**$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$。

$$\mathbf{X} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 3 \\ 0 & 0.6 & -1 \end{pmatrix}$$

即时练习

题:求 X

已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,且 $\mathbf{AX}+\mathbf{E}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X}$。

解析步解：

1. **整理：**$\mathbf{AX}-\mathbf{X}=\mathbf{A}^2-\mathbf{E} \implies (\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E})$。
2. **判定可逆：**$|\mathbf{A}-\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$。
3. **两端左乘** $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$**：**$\mathbf{X}=\mathbf{A}+\mathbf{E}$。

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

归纳总结与任务

PART 4

- **判定**：$|\mathbf{A}| \neq 0$ 是入场券。
- **算子**：二阶用“对调变号”，多阶用“伴随定义”。
- **解法**：矩阵方程必须像剥洋葱一样，从外向内，且左右分明。

逆矩阵实战课结束

下节预告：分块矩阵与复杂系统解构