第7讲 分块矩阵

第 二 章 矩 阵

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

CONTENTS

分块矩阵的基本概念

PART 1

对于阶数较高的矩阵，为了简化运算或便于揭示矩阵的结构规律，常用若干条横线和竖线将矩阵划分为若干个小块。

- 每个小块称为 **子块** (Sub-block)。
- 以子块为元素的矩阵称为 **分块矩阵** (Block Matrix)。

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，划分后可表示为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}$$

例:将 3×4 矩阵分块:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

- **分法的多样性**:同一个矩阵可以根据需要采取不同的分法。
- **一致性要求**:在后续的分块运算中,相应的子块维度必须匹配。

Philosophy Box:局部与整体

通过分块,我们将"观察视角"从离散的元素提升到了有结构的子块,类似于从关注单个零件转向关注功能模块。

算法守则:分块后的算术

PART 2

分块矩阵的计算法则与普通矩阵 **形式上完全一致**，但其子块必须满足：

- **加法**：两矩阵的分法必须完全同步。
- **乘法**：$\mathbf{A}$ 的列分法必须等于 $\mathbf{B}$ 的行分法。

即时练习

题：逻辑思考

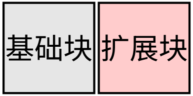
若把一个 3x3 矩阵横着切一刀，纵着切两刀，它的子块是什么维度的?

2.2 [Metaphor View] 跨界隐喻:乐高式组装

隐喻:预制建筑

- 将大厦拆为:厨卫模块、卧室模块、结构墙。
- 整体运算即各模块的逻辑组合。

只要连接点(行/列数)对齐,小模块可以像乐高一样无尽扩展。



实战：块对角与块副对角阵

PART 3

设 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k)$，则：

- $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| \cdot |\mathbf{A}_2| \dots |\mathbf{A}_k|$
- $\mathbf{A}^n = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1^n, \mathbf{A}_2^n, \dots, \mathbf{A}_k^n)$
- $\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1}, \dots, \mathbf{A}_k^{-1})$

工科理解：解耦 (Decoupling)

块对角线结构意味着各子系统之间 **互不干扰**。

即时练习

题:全方位计算

已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$,求 $\mathbf{A}^2,|\mathbf{A}^8|,\mathbf{A}^{-1}$。

解析步解: 划分子块: $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$。

- $\mathbf{A}_1^2 = \begin{pmatrix} 9+16 & 0 \\ 0 & 16+9 \end{pmatrix} = 25\mathbf{E}$。
- $\mathbf{A}_2^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$。

所以 $\mathbf{A}^2 = \mathrm{diag}(25\mathbf{E}, \mathbf{A}_2^2)$。

解析步解：

1. $|\mathbf{A}_1| = -25, |\mathbf{A}_2| = 4 \implies |\mathbf{A}| = -100$。
2. $|\mathbf{A}^8| = (-100)^8 = 10^{16}$。
3. $\mathbf{A}_1^{-1} = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$。

即得 $\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1})$。

对分块矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$,其逆矩阵为:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{C}^{-1}\\ \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$$

注意:口诀提醒

位置互换,各自求逆。 注意 $|\mathbf{A}|=(-1)^{mn}|\mathbf{B}||\mathbf{C}|$,其中 m,n 是子块的阶数。

即时练习

题:求 $\mathbf{A}^{-1}$

已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$,其中 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$。

解析步解：

1. $\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$。
2. $\mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$。
3. 拼装：$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{C}^{-1}\\ \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$。

全章总结与预告

PART 4

- **运算层**:数据的基础交互流。
- **解算层**:逆矩阵提供了系统的可追溯性。
- **架构层**:分块矩阵赋予了处理超大规模问题的能力。

至此,你已经掌握了描述复杂线性系统的“高级语言”。

矩阵全章实战结束

愿矩阵的逻辑助你洞察经济脉络