第3章矩阵的初等变换与线性方程组

线性代数的核心算法与解构

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

CONTENTS

1　初等变换:系统的“归一化”

初等变换：系统的“归一化”

PART 1

对矩阵进行以下三类操作,统称为 **初等行(列)变换**:

- **互换**:交换两行(列)的位置。
- **倍乘**:用一个非零常数 k 乘以某一行(列)。
- **倍加**:将某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上。

- 这三类变换统称为 **初等变换**。
- 后续我们将利用 these “工具”对矩阵进行大幅度的简化。

定义

对单位矩阵 $\mathbf{I}$ 执行一次初等变换所得到的矩阵,称为 **初等矩阵**。

我们为三类初等矩阵设定了统一记号(以行变换定义):

- $\mathbf{E}_{ij}$:交换第 i, j 行得到的矩阵。
- $\mathbf{E}_i(k)$:第 i 行乘以 k 得到的矩阵。
- $\mathbf{E}_{ij}(k)$:将第 j 行的 k 倍加到第 i 行得到的矩阵。

$\mathbf{E}_{12}(k)$ 的形态

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **左乘 $\mathbf{E}_{12}(k)\mathbf{A}$：**
  $r_1 + kr_2$（后加给前）
- **右乘 $\mathbf{A}\mathbf{E}_{12}(k)$：**
  $c_2 + kc_1$（前加给后）

$\mathbf{E}_{21}(k)$ 的形态

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **左乘 $\mathbf{E}_{21}(k)\mathbf{A}$：**
  $r_2 + kr_1$（后加给前）
- **右乘 $\mathbf{A}\mathbf{E}_{21}(k)$：**
  $c_1 + kc_2$（前加给后）

注意：避坑指南

记住一句话：**左乘时，下标顺序与行操作一致；右乘时，操作方向与下标顺序相反。**

即时练习

题:变换识别

已知 $\mathbf{A}$ 为 3×4 矩阵,描述以下运算的物理意义:

$$\mathbf{E}_2(3) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_{13}$$

解析步解:

1. **观察左侧:**$\mathbf{E}_2(3)$ 在左边 $\Longrightarrow$ 行变换:第 2 行乘以 3。
2. **观察右侧:**$\mathbf{E}_{13}$ 在右边 $\Longrightarrow$ 列变换:交换第 1 列和第 3 列。

1.3 矩阵的等价 (Matrix Equivalence)

定义

如果矩阵 $\mathbf{A}$ 经有限次 **初等变换**变成矩阵 $\mathbf{B}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **等价**，记作 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$。

- **数学本质**：存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}$。
- **基本性质**：反身性 $(A \sim A)$、对称性 $(A \sim B \Rightarrow B \sim A)$、传递性。

直观理解：虽然“长相”变了，但矩阵承载的 **核心特征信息**保持不变。

理论推导

若 $\mathbf{A}$ 可逆,则 $\mathbf{A}$ 必能经有限次初等行变换化为 $\mathbf{I}$。
这相当于存在一系列初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$ 使得:

$$(\mathbf{P}_k \dots \mathbf{P}_1)\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

两边同时右乘 $\mathbf{A}^{-1}$,得:

$$(\mathbf{P}_k \dots \mathbf{P}_1)\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$$

核心发现:对 $\mathbf{A}$ 执行的行变换序列,如果同样作用于 $\mathbf{I}$,结果就是 $\mathbf{A}^{-1}$!

为了同步记录变换过程，我们构造增广矩阵：

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) \xrightarrow{\text{仅限初等行变换}} (\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

操作步骤：

1. 将 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{I}$ 并列排成 $n \times 2n$ 矩阵。
2. 使用 **高斯-约当消元法**（Gauss-Jordan），通过行变换将左侧化为 $\mathbf{I}$。
3. 此时右侧原本是 $\mathbf{I}$ 的位置，自然就变成了 $\mathbf{A}^{-1}$。

即时练习

题:求逆练习

求 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{归一与回代}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 & -1 & 0.5 \end{array}\right)$$

注意:警示

在求逆过程中,**严禁使用列变换!** 否则你求出的将不是逆矩阵。

- **一个核心工具**：初等行变换（互换、倍乘、倍加）。
- **一个等价算子**：初等矩阵（左乘行变，右乘列变）。
- **一个基本关系**：矩阵的等价（$A \sim B \iff B = PAQ$）。
- **一个高效应用**：$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) \to (\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$ 求逆算法。

练一练：课后请独立完成习题册第 8 讲第 1-2 题，熟练掌握“行变换求逆”的操作细节。

3-1：初等变换与逆矩阵

下节预告：矩阵的秩 (提取系统的核心信息)