第3-2节：　矩阵的秩

寻找变换中的“不动点”与核心信息

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

[经管应用背景] 矩阵的秩有什么用?

在经济与管理模型中,矩阵的秩代表了系统的 **“信息独立性”** 或 **“资源有效性”**:

- **投入产出模型**:秩的大小决定了部门之间是否存在冗余。
- **资产组合定价**:若资产收益矩阵不满秩,说明某些资产可以由其他资产“复制”,存在 **套利机会**。
- **多维数据分析**:在 PCA 等降维算法中,秩决定了保留多少维度能代表核心特征。

学习目标:通过初等变换,迅速提取复杂数据矩阵中的核心“自由度”。

CONTENTS

从子式到秩的飞跃

PART 1

在定义秩之前,我们需要先理解矩阵的局部特征:

- **定义**:在 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 中,任取 k 行 k 列 $(k \leq \min\{m, n\})$,位于这些行列交叉点上的 k^2 个元素按原相对位置构成的 k 阶行列式,称为 $\mathbf{A}$ 的一个 k **阶子式**。

注意:规模分析

一个 3×4 矩阵有多少个 2 阶子式?
答案:$C_3^2 \times C_4^2 = 3 \times 6 = 18$ 个。

为了刻画矩阵的本质规模,我们引入“最高阶”的概念:

- **定义**:矩阵 $\mathbf{A}$ 中 **最高阶非零子式**的阶数,称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩,记作 $R(\mathbf{A})$。
- 特别地,零矩阵的秩规定为 0。

等价描述

若 $R(\mathbf{A}) = r$,意味着:

1. $\mathbf{A}$ 中至少有一个 r 阶子式不等于 0。
2. $\mathbf{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式(如果存在)全等于 0。

计算的工业标准

PART 2

子式定义虽然严谨,但直接计算所有子式简直是灾难。

核心定理

初等变换不改变矩阵的秩。

由此产生的算法思想:

- 将矩阵 $\mathbf{A}$ 通过初等行变换化为最简单的形态。
- 在最简形态下,一眼锁定非零子式。

2.2 锁定“秩”的终极形态:行阶梯形

- **操作目标**:利用初等行变换将 $\mathbf{A}$ 化为 **行阶梯形**。
- **判定法则**:

$$\text{矩阵的秩 } R(\mathbf{A}) = \text{行阶梯形矩阵中非零行的行数}$$

- **逻辑**:行阶梯形的非零行主元构成的对角子式必非零。
- **提示**:计算过程中,通常只需要行变换即可完成。

从基础计算到含参判定

PART 3

即时练习

题：求秩计算

计算矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ 的秩。

解析步解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 观察最后的行阶梯形矩阵,其非零行为前两行。
- 因此,矩阵的秩为:

$$R(\mathbf{A}) = 2$$

例 3-2-2:[变式] 依赖性判定 (对标作业 9.3)

■ 即时练习

题:参数判定

某投资组合包含 3 种风险资产,其协方差特征矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$。

若该组合的风险可以通过线性组合被完全抵消(即 $\mathbf{A}$ 为退化矩阵),试求 k 的取值,并讨论此时矩阵的秩。

解析步解:特征矩阵退化等价于 $|\mathbf{A}|=0$。

- 计算行列式:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3} (k+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = (k+4)(k-2)^2$$

- 令 $|\mathbf{A}|=0$,得 $k=-4$ 或 $k=2$。

秩的讨论:

- 若 $k=2$,则 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies R(\mathbf{A})=1$。
- 若 $k=-4$,由 $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=12\neq 0 \implies R(\mathbf{A})=2$。

从理论到实战的飞跃

PART 4

Skill 01:数值矩阵——“阶梯线”原则

对于不含参数的纯数值矩阵,核心是 **规范性**:

1. **选主元**:尽量选 1 或 -1 作为左上角主元(方便消元且不出分数)。
2. **向下消元**:利用第一行消去下面所有行的首列非零元。
3. **数行数**:化为行阶梯形后,**非零行**的个数即为秩。

实战建议

手动计算时,主元归 1 的动作可以留在 **最后一步**,以避免中间计算出现复杂分数。

Skill 02:含参矩阵——“行列式”判据

当矩阵中包含变量 k, t 时,优先考虑 **特征子式:**

- **方阵判据:**若 A 是 n 阶方阵,$R(A) < n \iff |A| = 0$。
- **分类讨论:**先解出令 $|A| = 0$ 的关键参数值,再分情况带回原矩阵验证。

注意陷阱

令 $|A| = 0$ 只能说明秩“跌落”了,但跌落到多少(是 $n-1$ 还是更小)需要带回参数后进行二次判断。

对于描述性的选择题或填空题，核心在于 **秩的唯一性**：

- **核心性质**：$A \sim B \iff R(A) = R(B)$。
- **判别法**：若 $|A| = 0$，则 $R(A) < n$，若此时 $A \sim B$，则必有 $R(B) < n$，进而 $|B| = 0$。

考场金律：等价即等秩，等秩即等价。

- **本质**:秩是矩阵中非零子式的最高阶数,代表了矩阵信息的“维度”。
- **性质**:初等变换保持秩不变。
- **方法**:化为行阶梯形,数非零行。
- **判据**:$R(\mathbf{A}) = n \iff |\mathbf{A}| \neq 0$(针对 n 阶方阵)。

课后挑战:若 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$R(\mathbf{A})$ 的取值范围是多少?(思考并查阅教材第 9 讲)