第3-3节：　消元法

线性方程组的矩阵解构与解的判定

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

[经管应用背景] 线性方程组的威力

在经管类问题的量化分析中，线性方程组是核心工具：

- **均衡分析**：在多产品市场中，寻找供给与需求达到平衡的价格体系。
- **资源配置**：在多种资源约束（如人力、原材料、预算）下，确定最优生产规模。
- **会计恒等式**：在复杂的账户结转中，利用消元法确立最终的收支平衡点。

学习目标：掌握矩阵消元法，不仅是为了"求得解"，更是为了判定系统是否"稳健"或"存在自由选择空间"。

CONTENTS

从代数方程到算子运算

PART 1

考虑含有 n 个未知数、m 个方程的线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$。

- **解集合 (Solution Set)**:满足方程组的所有向量构成的集合。
- **同解方程组 (Equivalent Systems)**:解集合完全相同的两个方程组。

核心工具:增广矩阵

将系数矩阵 $\mathbf{A}$ 与常数项 $\boldsymbol{b}$ 合并为 $\bar{\mathbf{A}}=(\mathbf{A}\mid\boldsymbol{b})$。

对 $\bar{\mathbf{A}}$ 进行初等行变换 $\iff$ 对原方程组进行消元(保持同解)。

方程组的解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$ 是一个 n 维列向量。

- **n 维向量**:由 n 个数组成的有序数组。
- **基本运算**:
  - **加法**:分量对应相加。
  - **数乘**:数 k 乘以每个分量。

- 方程组的矩阵形式 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 也可以看作是 $\mathbf{A}$ 的列向量的 **线性组合**。

克罗内克-卡佩里定理

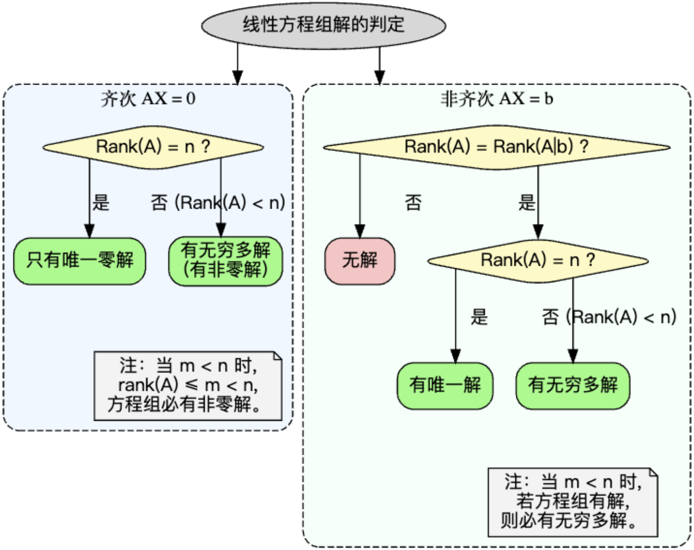
PART 2

令 $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$ 为 $m \times (n+1)$ 增广矩阵,n 为未知数个数:

解的情况	充要条件 (Rank Condition)	几何/逻辑意义
无解	$R(\mathbf{A}) < R(\bar{\mathbf{A}})$	出现了 $0 = 1$ 型矛盾
有唯一解	$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = n$	每个未知数都有确定归宿
有无穷多解	$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) < n$	存在自由度 $(n-r)$

- 齐次情形:$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$ 必有解($R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}})$ 恒成立)。
- 非齐次有解 $\iff R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}})$。

线性方程组解的判定逻辑全景



从矩阵到通解的逻辑路径

PART 3

■ 即时练习

题：求解挑战

求解方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$

例 3-3-1:非齐次线性方程组求解·解析

Step 1: 增广矩阵行初等变换

$$\bar{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Step 2: 判定

- $R(\mathbf{A})=R(\bar{\mathbf{A}})=2<4$ (未知数个数)。
- 结论:有无穷多解,自由未知数个数为 $4-2=2$。

Step 3: 写出同解方程组并取自由元继续化简为 **行最简形:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & -3/2 & -7/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

取 x_3, x_4 为自由未知数,令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$,得通解:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}c_1 + \frac{7}{4}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \qquad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

例 3-3-2:[变式] 生产计划讨论 (对标作业 10.1)

■ 即时练习

题:资源配置讨论

某工厂生产 3 种产品,消耗 3 种资源。其资源分配增广矩阵经初步整理后为:

$$\bar{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right)$$

讨论资源参数 λ 的取值如何影响生产计划的解的情况。

解析步解:计算系数矩阵行列式 $|A| = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$。

- **Case 1:** $\lambda \neq 1, -2$
  结论:**唯一解**。工厂有唯一的生产组合能精准耗尽资源。

- **Case 2:** $\lambda = -2$
  增广阵 $\bar{\mathbf{A}} \xrightarrow{r_1+r_2+r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & -9 \\ 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}$
  出现 $0=-9$。结论:**无解**。

- **Case 3:** $\lambda = 1$
  增广阵 $\bar{\mathbf{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$
  $R(A) = R(\bar{A}) = 1 < 3$。结论:**无穷多解**。

在客观题（选择/填空）中，经常出现如下逻辑（对标作业 10.4）：

核心结论

若 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$，则 $\mathbf{A}$ 必不可逆，即 $|\mathbf{A}|=0$。

考场应用：

- 这意味着齐次方程组 $\mathbf{A}x=0$ 必有非零解（$\mathbf{B}$ 的每一列都是它的解）。
- 对于 n 阶方阵，这直接等价于 $R(\mathbf{A})<n$。

秒杀动作：看到 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，第一反应就是求 $|\mathbf{A}|=0$ 解出未知参数。

- **一个中心**：消元法 $=$ 增广矩阵的初等行变换。
- **两个基本点**：化为“行阶梯形”判定解的情况，化为“行最简形”写出通解。
- **三个结论**：
  1. $R(\mathbf{A}) < R(\bar{\mathbf{A}}) \implies$ 无解。
  2. $R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = n \implies$ 唯一解。
  3. $R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) < n \implies$ 无穷解。