第 4-1 节：向量与线性相关性

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- **投资组合**:n 只资产的收益率构成 n 维向量 $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)^\mathrm{T}$。
- **消费需求**:消费者对 n 种商品的需求量组成需求向量。
- **信息冗余**:若几项经济指标线性相关,说明其中含有冗余信息。

学习目标:理解 n 维向量代数结构,掌握线性相关与无关判别方法,为研究解的结构奠定基础。

CONTENTS

从几何箭头到代数有序数组

PART 1

定义

由 n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 组成的有序数组称为 n **维向量**:

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}} \quad \text{(列向量,默认形式)}$$

各 a_i 称为第 i **个分量**。

- **列向量**:$n \times 1$ 矩阵;**行向量**:$1 \times n$ 矩阵,即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}$。
- **零向量** 0:各分量均为 0。
- **负向量**:$-\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)^{\mathsf{T}}$。

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathsf{T}}$，$k\in\mathbb{R}$：

- **加法**：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\ \ldots,\ a_n+b_n)^{\mathsf{T}}$
- **数乘**：$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\ \ldots,\ ka_n)^{\mathsf{T}}$
- **减法**：$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\beta}$

运算律

交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$　结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$　分配律：$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$

定义

称 $\beta = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量组的一个**线性组合**，或说 β 可由该向量组**线性表示**。

核心定理（桥接方程组）

β 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

$$\iff x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \beta \text{ 有解} \iff R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}})$$

其中 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m)$，$\bar{\mathbf{A}} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m, \beta)$。

向量组独立性的代数判别

PART 2

核心定义

定义

对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$,若存在**不全为零**的数 $k_1, \dots, k_m$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

则称该向量组**线性相关**;否则称**线性无关**。

几何直觉

- 两向量相关 $\Leftrightarrow$ 共线
- 三向量相关 $\Leftrightarrow$ 共面

代数本质

- 相关 $=$ 存在冗余向量(可被其余向量表示)
- 无关 $=$ 每个向量均不可由其余向量表示

设 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m)$,$n$ 为向量维数,m 为向量个数:

结论	等价条件
线性相关	$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$ 有非零解 $\iff R(\mathbf{A}) < m$
线性无关	$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$ 只有零解 $\iff R(\mathbf{A}) = m$
方阵特例 $(m = n)$	相关 $\iff \lvert\mathbf{A}\rvert = 0$;无关 $\iff \lvert\mathbf{A}\rvert \neq 0$
维数限制	$m > n$ 时必线性相关

考场判别流程（最重要的一页）

三步判别法（重点掌握）

1. **列向量 $\to$ 构成矩阵 $\mathbf{A}$**：把每个向量竖着写，拼成一个矩阵。
2. **初等行变换 $\to$ 化行阶梯形**：数出非零行数，即为秩 $R(\mathbf{A})$。
3. **比较秩与向量个数**：
   - $R(\mathbf{A}) = m$（向量个数）$\Rightarrow$ **线性无关**
   - $R(\mathbf{A}) < m \Rightarrow$ **线性相关**

方阵的快捷方法

向量个数 $=$ 每个向量的维数时（方阵情形）：直接算 $|\mathbf{A}|$，**行列式为 $\mathbf{0} \Rightarrow$ 线性相关**；**不为 $\mathbf{0} \Rightarrow$ 线性无关**。

按步骤一步一步来

PART 3

即时练习

题:具体向量组的相关性判别

判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 2, 4)^{\mathsf{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 3, 1, 2)^{\mathsf{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 0, 7, 14)^{\mathsf{T}}$ 的线性相关性。

构造矩阵并施行初等行变换:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1,\, r_4-4r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3/1,\, r_3, r_4 \to 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\mathbf{A}) = 2 < 3$(向量个数),故向量组 线性相关。

线性关系:由行最简形读出 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$。

■ 即时练习

题：向量能否被线性表示

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(k+1,1,1)^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,k+1,1)^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,k+1)^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(0,k,k^2)^{\mathsf{T}}$，试问当 k 为何值时：

1. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示？
2. 表示式不唯一？
3. $\boldsymbol{\beta}$ 不能被线性表示？

计算系数矩阵行列式:$|\mathbf{A}| = (k+3)k^2$

- **情形 1:**$|\mathbf{A}| \neq 0$**(**$k \neq 0$ **且** $k \neq -3$**)**
  $R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 3$,方程组有**唯一解**,$\beta$ 唯一表示。
- **情形 2:**$k = 0$
  此时 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)^{\mathsf{T}}$,$\boldsymbol{\beta} = 0$。
  $R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 1 < 3$,有**无穷多**表示式。
- **情形 3:**$k = -3$
  增广矩阵化简后出现 $0 = 6$ 矛盾行,$R(\mathbf{A}) < R(\bar{\mathbf{A}})$,**不能**线性表示。

即时练习

题：已知行列式推导新行列式

设 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为三阶矩阵，$|\mathbf{A}|=-\dfrac{1}{2}$，求

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ -\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3|$$

用矩阵乘法表示列变换:

记新矩阵为 $\mathbf{B}$,则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}}$$

利用行列式乘法公式:

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{K}|$$

计算 $|\mathbf{K}|$:展开得 $|\mathbf{K}| = 1(2+4) + 1(4+3) + 1(8-3) = 6+7+5 = 18$

故 $|\mathbf{B}| = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times 18 = -9$。

即时练习

题:含参讨论

讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,\lambda)^{\mathsf{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda,1)^{\mathsf{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(\lambda,1,1)^{\mathsf{T}}$ 对不同 λ 值的线性相关性。

计算系数矩阵行列式:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

- $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$:$|\mathbf{A}| \neq 0, R(\mathbf{A}) = 3$,线性无关。
- $\lambda = 1$:三向量相同,$R(\mathbf{A}) = 1 < 3$,线性相关。
- $\lambda = -2$:$|\mathbf{A}| = 0, R(\mathbf{A}) < 3$,线性相关。

本节考试总结

题型	方法	结论
判断相关性	列构矩阵 $\to$ 行变换 $\to$ 数秩	$R < m$ 相关,$R = m$ 无关
方阵判断	直接算行列式	$\|\mathbf{A}\| = 0$ 相关,否则无关
含参数讨论	先算行列式或增广矩阵	分 $\|\mathbf{A}\| = 0$ 和 $\neq 0$ 两种情形
行列式联动	新矩阵 $=$ 旧矩阵 $\times$ 系数矩阵	$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{K}\|$