第4-2节：向量组的秩

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

[经管背景] 秩:信息的有效维度

- **数据降维:**m 个经济指标中,若秩为 $r < m$,则只需 r 个指标即可完整描述系统。
- **方程独立性:**若 m 个约束条件的系数矩阵秩为 $r < m$,则有 $m - r$ 个约束是冗余的。
- **自由度:**$n - r$ 正是系统的" 自由变量个数",也是解空间的维数。

学习目标:理解极大线性无关组与向量组的秩,掌握利用初等行变换求秩与极大无关组的方法,理解三秩相等定理。

CONTENTS

寻找向量组中的”基石”

PART 1

考察向量组:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2,2)^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,2,3)^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,4,5)^{\mathsf{T}}$$

- $\boldsymbol{\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1$(**冗余**,第 2 个向量与第 1 个线性相关)
- $\boldsymbol{\alpha}_4 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$(**冗余**,第 4 个向量可由第 1、3 个表示)
- 核心信息仅由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 携带

这引出了**极大线性无关组**的概念:寻找向量组中携带完整信息的最小子集。

定义

若向量组 T 中存在 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 满足:

1. **无关性**:$\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
2. **代表性**:T 中任意一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示;

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 T 的一个**极大线性无关组**。

向量组的秩

极大线性无关组所含向量的个数 r 称为该向量组的**秩**,记为

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m) = r$$

注意:极大线性无关组一般**不唯一**,但秩(个数)是唯一确定的。

三秩相等与标准求法

PART 2

核心定理

$$\underbrace{R(\mathbf{A})}_{\text{矩阵的秩}} = \underbrace{R(\text{行向量组})}_{\text{行秩}} = \underbrace{R(\text{列向量组})}_{\text{列秩}}$$

实用意义：

- 初等**行**变换不改变矩阵的列向量组的线性相关关系（秩不变，但向量本身改变）。
- 化为行阶梯形后，主元（非零首元）所在的列对应的**原矩阵列向量**，构成极大线性无关组。
- 非零行的行数 = 矩阵的秩 = 列向量组的秩。

求极大线性无关组的标准步骤

1. 以各向量为**列向量**构成矩阵 $\mathbf{A}$。
2. 对 $\mathbf{A}$ 施行初等**行**变换，化为**行最简形**。
3. 行最简形中主元（每行首个非零元）所在的列编号，对应的**原矩阵**列向量即为极大线性无关组。
4. 非零行行数即为向量组的秩 r。
5. 其余向量的线性表示系数可从行最简形中直接读出。

关键：极大无关组取的是**原矩阵**的列向量，不是行最简形的列向量！

两道计算题，分步讲解

PART 3

即时练习

题:求秩与极大无关组

求向量组的秩和极大无关组,并将其余向量用极大无关组线性表示:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -2, -1, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, -4, -2, 0)^{\mathsf{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 0, 3, 3)^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = (-2, 4, 2, 0)^{\mathsf{T}}$$

例 4-2-1:解析

构造矩阵并化行最简形:

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

结论:

- 主元在第 **1、3** 列 $\Rightarrow$ 极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3$
- 秩 $R = 2$
- 从行最简形读出:$\boldsymbol{\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_4 = -2\boldsymbol{\alpha}_1$

即时练习

题：来自课后习题 §12

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\8\\4\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\7\\2\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-9\\6\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\12\\-8\\2\end{pmatrix}$$

求该向量组的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用此极大无关组线性表示。

以各向量为列构造矩阵,施行初等行变换:

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&-2&-3&1&2\\1&8&7&-9&12\\-2&4&2&6&-8\\1&-2&-3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_1,\,r_4-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-3&1&2\\0&10&10&-10&10\\0&0&-4&8&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{化行最简}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&0&-3&5\\0&\mathbf{1}&0&1&0\\0&0&\mathbf{1}&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例 4-2-2:解析(Step 2)

读出结论:

- 主元在第 1、2、3 列 $\Rightarrow$ 极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$
- 秩 $R = 3$

其余向量的线性表示(直接读取行最简形的第 4、5 列系数):

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = -3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$\boldsymbol{\alpha}_5 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$$

关键:线性表示系数直接来自行最简形对应列,取的是**原向量**的线性组合。

即时练习

题:求秩与线性表示

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

求该向量组的秩和一个极大线性无关组,并把其余向量用此极大无关组线性表示。

以各向量为列构造矩阵并化行最简形：

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&1&2&2\\2&-1&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&3&-1\\0&\mathbf{1}&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

结论：

- 主元在第 1、2 列 $\Rightarrow$ 极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2$
- 秩 $R=2$
- 从行最简形读出：$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$

即时练习

题:综合计算

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)^{\mathsf{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,-1,-5)^{\mathsf{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,3,11)^{\mathsf{T}}$。

1. 求向量组的秩与一个极大线性无关组。
2. 将其余向量用极大无关组线性表示。

构造矩阵并化行最简形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 主元在第 **1、2、3** 列 $\Rightarrow$ 极大无关组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$，秩 $R=3$。
- 三个向量本身线性无关，故没有其余向量需要线性表示。

核心公式：求极大无关组的标准流程

1. 向量竖着写，构造矩阵 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$。
2. 初等行变换 $\to$ 化行**最简**形（全部主元为 1）。
3. 最简形中每一列第一个非零元所在列（**主元列**，即行阶梯形中每行第一个非零元所在的列）对应的**原矩阵**列向量，就是极大无关组。
4. 秩 $R =$ 主元列的个数（$=$ 非零行行数）。
5. 其余向量的系数直接从最简形对应列读出。

注意：要取**原矩阵**的列向量！不是行最简形的列向量！