第4-3节：　线性方程组的解结构

张 振

厦门大学嘉庚学院
XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- **政策空间**:若某供需均衡方程组有无穷多解,则存在多个可行政策组合,自由度为 $n-r$。
- **参数化描述**:通解以向量形式给出,使得所有解的规律一目了然。
- **数值计算基础**:基础解系是线性系统数值求解的理论支撑。

学习目标:理解齐次与非齐次线性方程组解的结构定理,掌握基础解系求法,能用向量通解形式完整描述解集。

CONTENTS

解空间的向量结构

PART 1

关键性质(考试常考)

- **两个齐次解的和/差仍是齐次解:** $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_1 \pm \boldsymbol{\eta}_2) = 0$。
- **齐次解的数乘仍是齐次解:** $\mathbf{A}(k\boldsymbol{\eta}) = 0$。

解空间的维数(自由变量个数):

$$\text{自由变量个数} = n - R(\mathbf{A})$$

其中 n 为未知数个数,$r = R(\mathbf{A})$ 为系数矩阵的秩。

记住:自由变量有几个,基础解系就有几个向量。

定义

若 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$ 有非零解（即 $R(\mathbf{A}) < n$），称解空间的一个**极大线性无关组** $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为该方程组的一个**基础解系**。

通解结构定理

$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$ 的**通解**为：

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} \quad (c_1, c_2, \ldots, c_{n-r} \text{ 为任意常数})$$

1. 对系数矩阵 $\mathbf{A}$ 施行初等行变换,化为**行最简形**。
2. 确定**主元列**(含主元的列)对应的变量为**主变量**,其余列对应的变量为**自由变量**,自由变量个数为 $n-r$。
3. 依次令自由变量取标准单位向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-r}$,回代求出主变量,得到 $n-r$ 个线性无关的解向量。
4. 这 $n-r$ 个解向量即构成**基础解系**。

口诀:主变量由自由变量确定,自由变量依次取单位,基础解系共 $n-r$ 个。

特解 + 齐次通解

PART 2

设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的某一特解,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 均为特解,$\boldsymbol{\xi}$ 为对应齐次方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解:

- **特 + 特 $\neq$ 特**:两特解之和一般不是特解(但差是齐次解)。
- **特 − 特 = 齐**:$\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=0$,差是齐次解。
- **特 + 齐 = 特**:$\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{b}+0=\boldsymbol{b}$,仍是特解。

结构定理（核心公式）

非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（有解时）的**通解**为：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

其中 η^* 为任意一个**特解**，$\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ 为对应**齐次方程组的基础解系**，c_i 为任意常数。

通解的两个组成部分

- **特解** η^*：令所有自由变量 $= 0$，直接从行最简形读出的一个解。
- **齐次通解**：就是齐次方程组的基础解系，将所有自由变量依次取单位向量就能得到。

从增广矩阵到向量通解

PART 3

即时练习

题：基础解系计算

求方程组的基础解系与通解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

对系数矩阵施行初等行变换化行最简形:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -5 & 3 & 2\\ 7 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & \mathbf{1} & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r=R(\mathbf{A})=2$,$n=4$,故自由变量个数为 $4-2=2$,取 x_3,x_4 为自由变量。

令 $(x_3,x_4)=(1,0)$:$x_1=\frac{2}{7}$,$x_2=\frac{5}{7}$,$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{7}(2,5,7,0)^{\mathsf{T}}$
令 $(x_3,x_4)=(0,1)$:$x_1=\frac{3}{7}$,$x_2=\frac{4}{7}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{7}(3,4,0,7)^{\mathsf{T}}$

取整数形式,**基础解系**:$\xi_1=(2,5,7,0)^{\mathsf{T}}$,$\xi_2=(3,4,0,7)^{\mathsf{T}}$

通解:$\boldsymbol{x}=c_1(2,5,7,0)^{\mathsf{T}}+c_2(3,4,0,7)^{\mathsf{T}}$,$c_1,c_2$ 为任意常数。

即时练习

题：特解 + 齐次通解

求方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5 \end{cases}$$

厦门大学嘉庚学院 XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

增广矩阵行变换:

$$\bar{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{继续化简}} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 3 < 4 = n$,有无穷多解,自由变量为 x_4。

Step 2：写出特解与基础解系

主变量：$x_1 = 1 - x_4$，$x_2 = 0$，$x_3 = 2 + 2x_4$。

令 $x_4 = 0$：**特解** $\boldsymbol{\eta}^* = (1, 0, 2, 0)^{\mathsf{T}}$
令 $x_4 = 1$（代入齐次方程组）：$x_1 = -1$，$x_2 = 0$，$x_3 = 2$，**基础解系** $\boldsymbol{\xi} = (-1, 0, 2, 1)^{\mathsf{T}}$

通解：

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

例 4-3-3：由已知解向量重建通解（题）

即时练习

题：来自课后习题 §13

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的三个解向量，且

$$R(\mathbf{A}) = 3, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3,4)^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,2,3)^{\mathsf{T}}$$

1. 求 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$ 的通解；
2. 求 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解。

Step 1：确定齐次基础解系
$n=4$，$R(\mathbf{A})=3$，基础解系含 $4-3=\mathbf{1}$ 个向量。
利用" 特解之差为齐次解"：

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(1,2,3,4)^{\mathsf{T}}-(0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})^{\mathsf{T}}=(1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2})^{\mathsf{T}}$$

取整数形式：$\xi=(2,3,4,5)^{\mathsf{T}}$

Step 2：写出两个方程组的通解
$\mathbf{A}x=0$ 的通解：$k(2,3,4,5)^{\mathsf{T}}$，k 为任意常数。
$\mathbf{A}x=\beta$ 的通解：

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}$$

即时练习

题:来自课后习题 §13

线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$,问 a,b 为何值时,(1) 无解;(2) 唯一解;(3) 无穷多解(并求通解)。

增广矩阵行变换:

$$\bar{\mathbf{A}} \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

- **(1) 无解:**$a=1$ 且 $b \neq -1$。第 3 行出现 $0=b+1 \neq 0$ 矛盾。
- **(2) 唯一解:**$a \neq 1$。此时 $R(\mathbf{A})=R(\bar{\mathbf{A}})=4=n$。
- **(3) 无穷多解:**$a=1$ 且 $b=-1$。化简得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \text{通解:} \boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

题:解的结构综合题

已知 4×5 方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解,$R(\mathbf{A}) = 3$,$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是其三个解,且

$$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

写出该方程组的通解。

分析： $n=5$，$r=R(\mathbf{A})=3$，基础解系含 $5-3=2$ 个向量。

取特解： $\boldsymbol{\eta}^{*}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\frac{1}{2}(1,2,3,4,5)^{\mathsf{T}}$（两特解的算术平均仍是特解）

取齐次解：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\quad \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3$$

注意 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2=(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-2\boldsymbol{\eta}_2$，利用已知条件可得：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\quad \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3=(-1,-1,-1,-1,-1)^{\mathsf{T}}$$

通解： $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}(1,2,3,4,5)^{\mathsf{T}}+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$，$c_1,c_2$ 为任意常数。

方程组类型	通解形式	自由参数个数
齐次 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=0$	$c_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$	$n-r$ 个
非齐次 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\eta}^*+c_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$	$n-r$ 个

- **基础解系** $=$ 解空间($n-r$ 维)的一组基,含 $n-r$ 个线性无关的解向量。
- **求解流程:**增广矩阵 $\to$ 行最简形 $\to$ 确定主/自由变量 $\to$ 取自由变量为单位向量 $\to$ 回代。
- **非齐次特解:**令自由变量全为 0,直接读出主变量值。

题型	考场流程
齐次方程组通解	增广矩阵 $\to$ 行变换 $\to$ 自由变量依次取单位 $\to$ 基础解系
非齐次方程组通解	基础解系 $+$ 令自由变量 $= 0$ 得特解
由已知解反推通解	特解差 $=$ 齐次解;特解平均 $=$ 特解
含参数讨论	化阶梯形,看参数处是否出现 $0 = \neq 0$ 矛盾

通解公式:$x =$ 特解 $+ c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$