第 1 章：行列式复习讲义学生版

MatNoble

课程主页：https://matnoble.top/courses/economic-math-2

目录

本章定位

行列式章节的核心不是机械展开，而是识别结构并选择合适工具。常用工具包括行列式性质、余子式与代数余子式、特殊行列式和分块行列式。

考点：余子式、代数余子式与按行列展开

知识点 余子式 M_{ij} 是划去第 i 行第 j 列后得到的行列式；代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$。按第 i 行展开时，

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

当关注对象是“余子式之和”，不要误用代数余子式。

典型例题

设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

目标：确定第 1 行各元素余子式之和。

例题变式

设

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

目标：确定第 1 行第 1、3、4 个元素对应的代数余子式之和。

考点：行列式的线性性质与列变换

知识点　行列式对某一行或某一列具有线性性。常见结构是把新矩阵的列向量写成旧矩阵列向量的线性组合，再把新矩阵写成

$$\mathrm{B} = \mathrm{AC},$$

从而 $|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}||\mathrm{C}|$。

典型例题

设 $|\mathrm{A}| = -1$，且

$$\mathrm{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3).$$

目标：确定

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ -\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3|.$$

例题变式

设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $|A|=3$。目标：确定

$$|2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3|.$$

考点：特殊行列式：Vandermonde 型与同结构行列式

知识点　Vandermonde 行列式的标准形为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

识别出 x_i 后直接代入，比展开更稳定。

典型例题

计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 27 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

例题变式

计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

考点：特殊形状：行和或列和相等

知识点 当行列式每一行元素之和相等，或每一列元素之和相等时，常用“把若干行（列）加到一行（列）”的方式先提出公共因子，再用初等变换化简。典型结构是

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

其每一行之和均为 $a + (n-1)b$。该类行列式常化为

$$D_n = \left[a + (n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

典型例题

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

例题变式

计算

$$
D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.
$$

考点：特殊形状：箭形与边框型

知识点　箭形或边框型行列式通常只有第一行、第一列以及主对角线位置较密集，例如

$$
D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.
$$

若 $a_2, \ldots, a_n \neq 0$，可用第 2 到第 n 行消去第一行的非对角元素，从而化为三角形行列式。

典型例题

计算

$$
D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \qquad a_i \neq 0 \ (i = 2, \ldots, n).
$$

例题变式

计算

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

考点：分块三角行列式

知识点 若分块矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{pmatrix},$$

则其行列式等于 $|\mathrm{A}||\mathrm{B}|$。

典型例题

设 A, B 为 n 阶矩阵，关注

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{vmatrix}.$$

例题变式

设 $|\mathrm{A}| = 2, |\mathrm{B}| = -3$，其中 A, B 均为三阶矩阵，关注

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{C} & 2\mathrm{B} \end{vmatrix}.$$