第 1 章：行列式复习讲义教师版

MatNoble

课程主页：https://matnoble.top/courses/economic-math-2

目录

本章定位

行列式章节的核心不是机械展开，而是识别结构并选择合适工具。常用工具包括行列式性质、余子式与代数余子式、特殊行列式和分块行列式。

考点：余子式、代数余子式与按行列展开

知识点　余子式 M_{ij} 是划去第 i 行第 j 列后得到的行列式；代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$。按第 i 行展开时，

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

当关注对象是“余子式之和”，不要误用代数余子式。

典型例题

设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

目标：确定第 1 行各元素余子式之和。

【解】 第 1 行各元素余子式分别为

$$M_{11} = 0, \quad M_{12} = -1, \quad M_{13} = 0, \quad M_{14} = -1.$$

因此

$$M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14} = -2.$$

此处关注对象是“余子式”，不是“代数余子式”，所以不需要再乘符号因子 $(-1)^{1+j}$。

例题变式

设

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

目标：确定第 1 行第 1、3、4 个元素对应的代数余子式之和。

【解】 需要计算 $A_{11} + A_{13} + A_{14}$。

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9.$$

故

$$A_{11} + A_{13} + A_{14} = 11 + 2 - 9 = 4.$$

考点：行列式的线性性质与列变换

知识点 行列式对某一行或某一列具有线性性。常见结构是把新矩阵的列向量写成旧矩阵列向量的线性组合，再把新矩阵写成

$$\mathrm{B} = \mathrm{AC},$$

从而 $|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}||\mathrm{C}|$。

典型例题

设 $|\mathrm{A}| = -1$，且

$$\mathrm{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3).$$

目标：确定

$$|\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\ -\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3|.$$

【解】 将新矩阵写为旧矩阵乘以系数矩阵:

$$\mathrm{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

系数矩阵行列式为 2，故

$$|\mathrm{B}| = (-1) \times 2 = -2.$$

例题变式

设 $\mathrm{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $|\mathrm{A}| = 3$。目标：确定

$$|2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3|.$$

【解】 新矩阵等于

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix} = -3.$$

因此该行列式为

$$3 \times (-3) = -9.$$

考点：特殊行列式：Vandermonde 型与同结构行列式

知识点　Vandermonde 行列式的标准形为

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

识别出 x_i 后直接代入，比展开更稳定。

典型例题

计算

$$D = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -1\\ 1 & 9 & 4 & 1\\ 1 & 27 & 8 & -1\end{vmatrix}.$$

【解】　这是 Vandermonde 型，取

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 3, 2, -1).$$

因此

$$D = (3-1)(2-1)(-1-1)(2-3)(-1-3)(-1-2) = 48.$$

例题变式

计算

$$D = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

【解】 对应 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = -1$，所以

$$D = (1-0)(2-0)(-1-0)(2-1)(-1-1)(-1-2).$$

化简得

$$D = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) = -12.$$

考点：特殊形状：行和或列和相等

知识点 当行列式每一行元素之和相等，或每一列元素之和相等时，常用“把若干行（列）加到一行（列）”的方式先提出公共因子，再用初等变换化简。典型结构是

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

其每一行之和均为 $a + (n-1)b$。该类行列式常化为

$$D_n = \left[a + (n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

典型例题

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

【解】 这里 $a = 2, b = 1$，每一行元素之和为

$$2 + (n-1) \cdot 1 = n + 1.$$

使用行和相等型公式:

$$D_n = \left[2 + (n-1) \cdot 1\right](2-1)^{n-1} = n + 1.$$

也可以将所有列加到第 1 列，提出 $n+1$，再用第 1 行消去其余行首项，得到同样结果。

例题变式

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

【解】 将所有列加到第 1 列：

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n \longrightarrow c_1.$$

新第 1 列所有元素均为 $a+(n-1)b$，提出该公因子。随后作

$$r_i - r_1 \longrightarrow r_i \quad (i = 2, \ldots, n),$$

可得到主对角线上除第一项外均为 $a-b$ 的三角结构。因此

$$D_n = \left[a + (n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

考点：特殊形状：箭形与边框型

知识点 箭形或边框型行列式通常只有第一行、第一列以及主对角线位置较密集，例如

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

若 $a_2, \ldots, a_n \neq 0$，可用第 2 到第 n 行消去第一行的非对角元素，从而化为三角形行列式。

典型例题

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \qquad a_i \neq 0 \ (i = 2, \ldots, n).$$

【解】 使用第 2 到第 n 行消去第一行对应位置的 1：

$$r_1 - \frac{1}{a_2}r_2 - \frac{1}{a_3}r_3 - \cdots - \frac{1}{a_n}r_n \to r_1.$$

行列式化为

$$\begin{vmatrix} a_1 - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} - \cdots - \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

因此

$$D_n = \left(a_1 - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} - \cdots - \frac{1}{a_n}\right) a_2 a_3 \cdots a_n.$$

例题变式

计算

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

【解】 这是箭形结构。由上一公式，

$$D = \left(4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6.$$

括号内为

$$4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 4 - 1 = 3.$$

因此

$$D = 3 \cdot 36 = 108.$$

考点：分块三角行列式

知识点 若分块矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},$$

则其行列式等于 $|A||B|$。

典型例题

设 A, B 为 n 阶矩阵，关注

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}.$$

【解】 这是分块下三角行列式，其值等于对角分块行列式之积:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

例题变式

设 $|A| = 2, |B| = -3$，其中 A, B 均为三阶矩阵，关注

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & 2B \end{vmatrix}.$$

【解】 该分块矩阵是分块下三角矩阵，所以

$$D = |A||2B|.$$

因 B 为三阶矩阵,

$$|2B| = 2^3|B| = 8(-3) = -24.$$

故

$$D = 2 \times (-24) = -48.$$