第 2 章：矩阵及其运算复习讲义教师版

MatNoble

课程主页：https://matnoble.top/courses/economic-math-2

目录

本章定位

矩阵运算的重点是运算顺序、可逆性条件和分块结构。复习时要特别注意：矩阵乘法一般不可交换，逆矩阵乘积要反序，分块矩阵要先看块的位置。

考点：矩阵运算律与常见误区

知识点　矩阵转置满足

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T.$$

若 A, B 可逆，则

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

注意反序。

典型例题

下列矩阵恒等式的正误辨析：

$$(A)\quad (\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1},$$

$$(B)\quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{B}^{\mathrm{T}},$$

$$(C)\quad \mathrm{AB}=\mathrm{O}\Rightarrow \mathrm{A}=\mathrm{O}\text{ 或}\mathrm{B}=\mathrm{O},$$

$$(D)\quad (\mathrm{AB})^{k}=\mathrm{B}^{k}\mathrm{A}^{k}.$$

【解】 转置对加法满足分配律，所以 (B) 正确。(A) 中逆矩阵乘积顺序错误，正确公式是

$$(\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}.$$

(C) 错，因为矩阵乘积为零不推出因子为零。(D) 一般也错，因为矩阵乘法不可交换。

例题变式

若 A,B 均可逆，化简

$$(\mathrm{ABA}^{-1})^{-1}.$$

【解】 按乘积逆矩阵公式反序：

$$(\mathrm{ABA}^{-1})^{-1}=(\mathrm{A}^{-1})^{-1}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{AB}^{-1}\mathrm{A}^{-1}.$$

考点：伴随矩阵与逆矩阵

知识点 若 A 可逆，则

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathrm{A}|}\mathrm{A}^{*},\qquad \mathrm{AA}^{*}=\mathrm{A}^{*}\mathrm{A}=|\mathrm{A}|\mathrm{E}.$$

遇到由矩阵方程推出逆矩阵的题，常把方程整理为 $\mathrm{AB}=c\mathrm{E}$。

典型例题

已知方阵 A 满足

$$\mathrm{A}^{2}-2\mathrm{A}+3\mathrm{E}=\mathrm{O},$$

目标：给出 A^{-1}。

【解】 将方程改写为

$$\mathrm{A}(2\mathrm{E}-\mathrm{A})=3\mathrm{E}.$$

右端为非零常数倍单位矩阵，因此 A 可逆。两边除以 3，可得

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(2E - A).$$

例题变式

已知方阵 A 满足

$$A^2 - A + 2E = O,$$

目标：给出 A^{-1}。

【解】 由原式得

$$A^2 - A = -2E \quad \Rightarrow \quad A(A - E) = -2E.$$

因此

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - E).$$

典型例题

已知

$$|A| = 2, \qquad A \text{ 为三阶可逆矩阵}.$$

关注 $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} - 2A^*$ 与 A^* 的关系。

【解】 由数乘矩阵逆矩阵公式:

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2A^{-1}.$$

又

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{2}A^*.$$

因此

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2}A^* = A^*,$$

从而

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} - 2A^* = -A^*.$$

这类结构的重点是先把逆矩阵统一转化为伴随矩阵。

例题变式

已知

$$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&2\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

目标：给出 A^{-1}。

【解】 该矩阵可看作分块对角结构：

$$A=\begin{pmatrix}5&O\\O&B\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}.$$

先计算

$$B^{-1}=\frac{1}{2\cdot 3-2\cdot 1}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

考点：分块矩阵的逆

知识点 对于

$$M=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix},$$

若 A,B 均可逆，则

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}.$$

注意 A^{-1} 与 B^{-1} 的位置会交换。

典型例题

分析

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&A^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$$

是否正确。

【解】 设

$$N=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}.$$

所以正确逆矩阵应为

$$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix},$$

题中写法不正确。

例题变式

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

目标：给出

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}.$$

【解】 先计算

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

典型例题

设

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix},$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

关注 M^{10} 的分块计算路径。

【解】 分块平方为

$$M^2 = \begin{pmatrix} BC & O \\ O & CB \end{pmatrix}.$$

因此

$$M^{10} = (M^2)^5 = \begin{pmatrix} (BC)^5 & O \\ O & (CB)^5 \end{pmatrix}.$$

其中

$$BC = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad CB = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

该结构的核心是先化为对角分块幂，而不是直接计算四阶矩阵的高次幂。

考点：矩阵方程

知识点 解矩阵方程时，先把未知矩阵集中到一侧，再分析能否左乘或右乘逆矩阵。矩阵乘法不可交换，因此必须保留因子的左右顺序。

典型例题

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

且 $AX + E = A^2 + X$，目标是确定 X。

【解】 移项得

$$AX - X = A^2 - E.$$

左边提出右因子 X，右边分解平方差：

$$(A - E)X = (A - E)(A + E).$$

因

$$|A - E| = -4 \neq 0,$$

故 $A - E$ 可逆。左乘其逆矩阵，得

$$X = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

例题变式

设 A 可逆，且

$$AX-2X=A.$$

若 $A-2E$ 可逆，目标是确定 X。

【解】 将左边提出右因子 X:

$$(A-2E)X=A.$$

左乘 $(A-2E)^{-1}$，得

$$X=(A-2E)^{-1}A.$$

典型例题

已知矩阵 A 和 B 满足

$$AB=A+2B,\qquad A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}.$$

目标：确定 B。

【解】 将含 B 的项集中到一侧:

$$AB-2B=A.$$

左边提出右因子 B:

$$(A-2E)B=A.$$

若 $A-2E$ 可逆，则

$$B=(A-2E)^{-1}A.$$

对增广矩阵 $(A-2E,A)$ 作初等行变换，可得

$$B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$