第 3 章：矩阵的初等变换与线性方程组复习讲义学生版

MatNoble

课程主页：https://matnoble.top/courses/economic-math-2

目录

本章定位

本章关注用初等变换分析线性方程组的相容性、解的个数与通解结构。核心工具是系数矩阵、增广矩阵、阶梯形和秩。

考点：齐次线性方程组的非零解判定

知识点　齐次方程组 $\mathrm{A}\mathrm{X}=0$ 一定有零解。若未知量个数等于方程个数，非零解存在的充要条件是

$$|\mathrm{A}| = 0.$$

更一般地，若未知量个数为 n，则有非零解的充要条件是 $R(\mathrm{A}) < n$。

典型例题

方程组

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0, \\ x + ky + 2z = 0, \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$$

当 k 为何值时有非零解?

例题变式

方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

当 a 为何值时有非零解?

考点：非齐次线性方程组的秩判别

知识点　对于 $\mathrm{AX} = \boldsymbol{b}$:

$$R(\mathrm{A}) < R(\mathrm{A}, \boldsymbol{b}) \Rightarrow \text{无解};$$

$$R(\mathrm{A}) = R(\mathrm{A}, \boldsymbol{b}) = n \Rightarrow \text{唯一解};$$

$$R(\mathrm{A}) = R(\mathrm{A}, \boldsymbol{b}) < n \Rightarrow \text{无穷多解}.$$

这里 n 是未知量个数。

典型例题

参数 λ 对方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

解的个数与通解结构的影响。

例题变式

讨论方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ 2x_1 + (a+1)x_2 + (a+1)x_3 = 2, \\ (a+2)x_1 + 3x_2 + (2a+1)x_3 = 3 \end{cases}$$

的解的分类及无穷多解时的通解结构。

考点：行满秩矩阵与非齐次方程组

知识点　若 A 是 $m \times n$ 矩阵，且 $R(\mathrm{A}) = m < n$，则 A 行满秩。对任意 $\boldsymbol{b}$，都有

$$R(\mathrm{A}) = R(\mathrm{A}, \boldsymbol{b}) = m,$$

故方程组有解；又因为 $m < n$，自由变量至少一个，所以有无穷多解。

典型例题

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，$R(\mathrm{A}) = m < n$。分析非齐次线性方程组 $\mathrm{AX} = \boldsymbol{b}$ 的解的情况。

例题变式

若 A 是 3×5 矩阵，且 $R(\mathrm{A}) = 3$，则 $\mathrm{AX} = \boldsymbol{b}$ 是否一定有解？若有解，解是否唯一？