第 3 章：矩阵的初等变换与线性方程组复习讲义教师版

MatNoble

课程主页：https://matnoble.top/courses/economic-math-2

目录

本章定位

本章关注用初等变换分析线性方程组的相容性、解的个数与通解结构。核心工具是系数矩阵、增广矩阵、阶梯形和秩。

考点：齐次线性方程组的非零解判定

知识点 齐次方程组 $\mathrm{A}\mathrm{X} = 0$ 一定有零解。若未知量个数等于方程个数，非零解存在的充要条件是

$$|\mathrm{A}| = 0.$$

更一般地，若未知量个数为 n，则有非零解的充要条件是 $R(\mathrm{A}) < n$。

典型例题

方程组

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0, \\ x + ky + 2z = 0, \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$$

当 k 为何值时有非零解?

【解】 这是三元齐次方程组。有非零解等价于系数行列式为 0:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & k & 2 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = 0.$$

计算得

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & k & 2 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)(k+1)(k+2).$$

因此

$$k = -2, -1, 1.$$

例题变式

方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

当 a 为何值时有非零解?

【解】 系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

作 $r_2 - r_1, r_3 - r_1$，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2.$$

有非零解对应 $(a-1)^2 = 0$，故 $a = 1$。

考点：非齐次线性方程组的秩判别

知识点 对于 $\mathrm{AX} = \boldsymbol{b}$:

$$R(\mathrm{A}) < R(\mathrm{A}, \boldsymbol{b}) \Rightarrow \text{无解};$$

$$R(\mathrm{A}) = R(\mathrm{A}, \boldsymbol{b}) = n \Rightarrow \text{唯一解};$$

$$R(\mathrm{A}) = R(\mathrm{A}, \boldsymbol{b}) < n \Rightarrow \text{无穷多解}.$$

这里 n 是未知量个数。

典型例题

参数 λ 对方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

解的个数与通解结构的影响。

【解】 对增广矩阵作初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda+2) & -(\lambda-1)(\lambda+1) \end{array}\right).$$

由最后一行分析:

(1) $\lambda \neq -2, 1$ 时，系数矩阵满秩，有唯一解。

(2) $\lambda = -2$ 时，最后一行变为 $0 = -3$，无解。

(3) $\lambda = 1$ 时，方程组化为 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$，有无穷多解。令 $x_2 = k_1, x_3 = k_2$，则

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例题变式

讨论方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + a x_3 = 1, \\ 2x_1 + (a+1)x_2 + (a+1)x_3 = 2, \\ (a+2)x_1 + 3x_2 + (2a+1)x_3 = 3 \end{cases}$$

的解的分类及无穷多解时的通解结构。

【解】 增广矩阵化为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & 1-a \end{array}\right).$$

(1) 当 $a \neq -2, 1$ 时，有唯一解。

(2) 当 $a = -2$ 时，最后一行变为 $0 = 3$，无解。

(3) 当 $a=1$ 时，方程组化为 $x_1+x_2+x_3=1$，有无穷多解：

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

考点：行满秩矩阵与非齐次方程组

知识点 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $R(\mathrm{A})=m<n$，则 A 行满秩。对任意 $\boldsymbol{b}$，都有

$$R(\mathrm{A})=R(\mathrm{A},\boldsymbol{b})=m,$$

故方程组有解；又因为 $m<n$，自由变量至少一个，所以有无穷多解。

典型例题

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$R(\mathrm{A})=m<n$。分析非齐次线性方程组 $\mathrm{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况。

【解】 因 $R(\mathrm{A})=m$，增广矩阵 $(\mathrm{A},\boldsymbol{b})$ 的秩不可能超过行数 m，又必有

$$R(\mathrm{A},\boldsymbol{b})\geq R(\mathrm{A})=m.$$

所以

$$R(\mathrm{A},\boldsymbol{b})=R(\mathrm{A})=m.$$

方程组有解。又 $m<n$，未知量个数大于秩，因此有无穷多解。

例题变式

若 A 是 3×5 矩阵，且 $R(\mathrm{A})=3$，则 $\mathrm{AX}=\boldsymbol{b}$ 是否一定有解？若有解，解是否唯一？

【解】 因为 $R(\mathrm{A})=3$ 等于行数，故 A 行满秩，对任意 $\boldsymbol{b}$ 都有解。未知量个数为 5，秩为 3，自由变量个数为

$$5-3=2.$$

因而解不唯一，且有无穷多解。