

第 4 章：向量组的线性相关性复习讲义学生版

MatNoble

课程主页: <https://matnoble.top/courses/economic-math-2>

目录

1. 线性相关与线性无关的判定
2. 向量组的秩与极大线性无关组
3. 基础解系的等价替换
4. 非齐次线性方程组解的结构

本章定位

向量组的线性相关性通常转化为矩阵秩视角。线性相关性、秩、极大无关组与线性表示都可以通过列矩阵和初等行变换统一处理。

考点：线性相关与线性无关的判定

知识点 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 n 维向量，把它们作为列组成矩阵

$$M = (\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

向量组线性无关等价于 $R(M) = s$ ；线性相关等价于 $R(M) < s$ 。当 $s = n$ 时，也可用行列式是否为 0 分析。

典型例题

已知

$$\alpha_1 = (1, 2, 0, 1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1, 1),$$

$$\alpha_3 = (1, t, -1, 1), \quad \alpha_4 = (0, 1, t, 1).$$

参数 t 与该向量组线性无关性的关系。

例题变式

设

$$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (2, t, 1)^T.$$

参数 t 与三向量线性相关性的关系。

典型例题

设

$$\alpha_1 = (1, 2, t)^T, \quad \alpha_2 = (1, t, 2)^T, \quad \alpha_3 = (1, t, t^2)^T.$$

关注参数 t 与三向量线性相关性的关系。

例题变式

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & a & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

关注 $R(A) = 2$ 对参数 a 的限制。

考点：向量组的秩与极大线性无关组

知识点 把向量作为列组成矩阵并化为阶梯形。非零行数就是向量组的秩；主元列对应原向量中的一个极大线性无关组。行最简形中非主元列的坐标可以读出其余向量的线性表示。

典型例题

向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

的秩、一个极大线性无关组及其余向量的线性表示。

例题变式

向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

的秩、一个极大线性无关组及其余向量的线性表示。

考点：基础解系的等价替换

知识点 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次方程组的一组基础解系，则任何由它们线性组合得到的新向量组仍是解向量组。新向量组是否仍为基础解系，关键看新向量组是否线性无关。

典型例题

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系。分析

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_3$$

的基础解系性质。

例题变式

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。分析

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 - \alpha_3, \quad \alpha_1 + \alpha_3$$

的线性相关性。

典型例题

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，分析

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

的线性相关性。

考点：非齐次线性方程组解的结构

知识点 若 η_1, η_2 都是非齐次方程组 $AX = \mathbf{b}$ 的解，则

$$\eta_1 - \eta_2$$

是对应齐次方程组 $AX = 0$ 的解。非齐次方程组通解为

一个特解 + 对应齐次方程组通解.

典型例题

已知 4 元非齐次线性方程组 $AX = \mathbf{b}$ 满足 $R(A) = R(A, \mathbf{b}) = 3$ ，且 η_1, η_2, η_3 均是其解，

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$AX = 0$ 与 $AX = \mathbf{b}$ 的通解结构。

例题变式

已知 $AX = \mathbf{b}$ 是 4 元非齐次线性方程组， $R(A) = 3$ ，且

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

均由其解向量组合得到。关注对应齐次方程组通解与非齐次通解结构。