

第 4 章：向量组的线性相关性复习讲义教师版

MatNoble

课程主页：<https://matnoble.top/courses/economic-math-2>

目录

1. 线性相关与线性无关的判定
2. 向量组的秩与极大线性无关组
3. 基础解系的等价替换
4. 非齐次线性方程组解的结构

本章定位

向量组的线性相关性通常转化为矩阵秩视角。线性相关性、秩、极大无关组与线性表示都可以通过列矩阵和初等行变换统一处理。

考点：线性相关与线性无关的判定

知识点 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 n 维向量，把它们作为列组成矩阵

$$M = (\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

向量组线性无关等价于 $R(M) = s$ ；线性相关等价于 $R(M) < s$ 。当 $s = n$ 时，也可用行列式是否为 0 分析。

典型例题

已知

$$\alpha_1 = (1, 2, 0, 1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1, 1),$$

$$\alpha_3 = (1, t, -1, 1), \quad \alpha_4 = (0, 1, t, 1).$$

参数 t 与该向量组线性无关性的关系。

【解】 四个四维向量线性无关，等价于以它们为列的行列式不为 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -1 & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - t.$$

因此线性无关的条件是

$$3 - t \neq 0,$$

即 $t \neq 3$ 。

例题变式

设

$$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (2, t, 1)^T.$$

参数 t 与三向量线性相关性的关系。

【解】 构造行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t - 1.$$

线性相关对应行列式为 0, 所以

$$t = 1.$$

典型例题

设

$$\alpha_1 = (1, 2, t)^T, \quad \alpha_2 = (1, t, 2)^T, \quad \alpha_3 = (1, t, t^2)^T.$$

关注参数 t 与三向量线性相关性的关系。

【解】 三个三维向量线性相关，等价于以它们为列的行列式为 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t \\ t & 2 & t^2 \end{vmatrix} = 0.$$

计算并因式分解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t \\ t & 2 & t^2 \end{vmatrix} = -(t-2)^2(t+1).$$

因此相关参数来自

$$t = 2 \text{ 或 } t = -1.$$

若存在附加的参数范围或非退化条件，可在这些候选值中继续筛选。

例题变式

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & a & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

关注 $R(A) = 2$ 对参数 a 的限制。

【解】 三阶矩阵秩为 2，首先需要

$$|A| = 0.$$

计算得

$$|A| = -(a-1)(a^2+a+7).$$

由于 a^2+a+7 的判别式为 $1-28 < 0$ ，实数范围内只有候选值 $a=1$ 。

当 $a=1$ 时，可找到非零二阶子式，例如

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

且三阶行列式为 0，所以秩为 2。该结构的规范分析路径是：先用三阶行列式给出候选值，再用二阶子式确认秩没有降到 1。

考点：向量组的秩与极大线性无关组

知识点 把向量作为列组成矩阵并化为阶梯形。非零行数就是向量组的秩；主元列对应原向量中的一个极大线性无关组。行最简形中非主元列的坐标可以读出其余向量的线性表示。

典型例题

向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

的秩、一个极大线性无关组及其余向量的线性表示。

【解】 构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

初等行变换得

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

非零行数为 2, 所以向量组的秩为 2。主元列为第 1、2 列, 故一个极大线性无关组为

$$\alpha_1, \alpha_2.$$

由行最简形可读出

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

例题变式

向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

的秩、一个极大线性无关组及其余向量的线性表示。

【解】 以向量为列组成矩阵并化简:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

秩为 2, 极大线性无关组可取 α_1, α_2 。并且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2.$$

考点：基础解系的等价替换

知识点 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次方程组的一组基础解系，则任何由它们线性组合得到的新向量组仍是解向量组。新向量组是否仍为基础解系，关键看新向量组是否线性无关。

典型例题

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系。分析

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_3$$

的基础解系性质。

【解】 设

$$c_1(\alpha_1 + \alpha_2) + c_2(\alpha_1 - \alpha_2) + c_3\alpha_3 = 0.$$

合并同类项：

$$(c_1 + c_2)\alpha_1 + (c_1 - c_2)\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0.$$

因原基础解系线性无关，所以

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 - c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

解得 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ，故新向量组线性无关，仍为基础解系。

例题变式

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。分析

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 - \alpha_3, \quad \alpha_1 + \alpha_3$$

的线性相关性。

【解】 相对于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，三个向量的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

其行列式为 0，因此这三个向量线性相关。

典型例题

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，分析

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

的线性相关性。

【解】 相对于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 三个向量的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

其行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

因此该向量组线性无关。用系数矩阵分析, 是处理“由已知无关向量组线性组合而成的新向量组”的通用方式。

考点: 非齐次线性方程组解的结构

知识点 若 η_1, η_2 都是非齐次方程组 $AX = b$ 的解, 则

$$\eta_1 - \eta_2$$

是对应齐次方程组 $AX = 0$ 的解。非齐次方程组通解为

一个特解 + 对应齐次方程组通解。

典型例题

已知 4 元非齐次线性方程组 $AX = b$ 满足 $R(A) = R(A, b) = 3$, 且 η_1, η_2, η_3 均是其解,

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$AX = 0$ 与 $AX = b$ 的通解结构。

【解】 未知量个数为 4, $R(A) = 3$, 所以齐次方程组基础解系只含一个向量。由非齐次解的性质,

$$2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是齐次方程组的非零解，故

$$AX = 0 \text{ 的通解为 } k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

又 η_1 是非齐次方程组的一个特解，所以

$$AX = \mathbf{b} \text{ 的通解为 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

例题变式

已知 $AX = \mathbf{b}$ 是 4 元非齐次线性方程组， $R(A) = 3$ ，且

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

均由其解向量组合得到。关注对应齐次方程组通解与非齐次通解结构。

【解】 两个非齐次解组合的差仍是齐次方程组的解：

$$(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

因 $4 - R(A) = 1$ ，该非零向量可作为基础解系，故齐次通解为

$$k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

又

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是非齐次方程组的一个特解，故非齐次通解为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$